MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

04

Sequences and Series

अनुक्रम और श्रेणी

Patterns, sums and mathematical means

6 concepts	6 worked examples	12 practice questions
छह मुख्य अवधारणाएँ	छह हल किए उदाहरण	बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Distinguish a term from a partial sum.
- Model arithmetic and geometric patterns.
- Choose a summation method from the term structure.

Before you start: Algebraic manipulation and powers.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Read the rule behind a pattern पद और आंशिक योग	Q01, Q02
C2 p. 2	Arithmetic change समांतर वृद्धि	Q03, Q04, Q05, Q06
C3 p. 3	Geometric change गुणोत्तर वृद्धि	Q07, Q08
C4 p. 3	Infinite sums need convergence अनंत योग की शर्त	Q09
C5 p. 4	Compare three means तीन प्रकार के माध्य	Q10
C6 p. 4	Make cancellation work निरसन से योग	Q11, Q12

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Read the rule behind a pattern / पद और आंशिक योग

A sequence is an ordered list; a series adds its terms. The nth term a_n describes one position, whereas S_n describes the sum up to that position. When a partial-sum formula is known, subtract consecutive sums to recover a term.

> अनुक्रम में पद क्रम से लिखे जाते हैं; श्रेणी में उन्हें जोड़ा जाता है। a_n केवल एक पद है, जबकि S_n पहले n पदों का योग है। लगातार दो आंशिक योग घटाने पर nth पद मिलता है। उदाहरण में यह 4n + 1 है।

$a_n = S_n - S_{n-1}$ for $n \geq 2$; $a_1 = S_1$.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

If $S_n = 2n^2 + 3n$, find a_n.

Solution: For $n \geq 2$, subtract $2(n - 1)^2 + 3(n - 1)$ to get $4n + 1$. Also $a_1 = 5$, matching the same formula.

WATCH OUT: A few initial terms do not determine a unique infinite sequence.

C2 / KEY CONCEPT

Arithmetic change / समांतर वृद्धि

In an arithmetic progression, adjacent terms differ by a constant d. The nth term is reached after n - 1 steps. Pairing the first and last terms gives the sum formula. The average of two equally spaced terms equals the central term when there is one.

> समांतर श्रेणी में हर अगला पद समान अंतर d जोड़कर मिलता है। पहले से nth पद तक n - 1 कदम होते हैं। उदाहरण में a = 7 और d = 4 है; 18वाँ पद 75 तथा पहले 18 पदों का योग 738 है।

$a_n = a + (n - 1)d$; $S_n = n[2a + (n - 1)d]/2$.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

Find the 18th term and sum of the first 18 terms of 7,11,15,... .

Solution: Here a = 7 and d = 4. The 18th term is 7 + 17(4) = 75. The sum is 18(7 + 75)/2 = 738.

WATCH OUT: The number of increments is one less than the number of terms.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Geometric change / गुणोत्तर वृद्धि

In a geometric progression, each term is multiplied by a fixed ratio r. Subtracting rS_n from S_n cancels interior terms and yields the sum formula. The separate case r = 1 is a constant sequence with sum na.

गुणोत्तर श्रेणी में हर अगला पद समान अनुपात r से गुणा करके मिलता है। उदाहरण में 3,6,12,... के लिए r = 2 है। पहले पाँच पदों का योग 93 है। r = 1 होने पर अलग से $S_n = na$ प्रयोग करें।

$a_n = ar^{n-1}$; $S_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$, $r \neq 1$.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Find the first five-term sum of 3,6,12,... .

Solution: a = 3 and r = 2. $S_5 = 3(2^5 - 1)/(2 - 1) = 93$. Direct addition 3 + 6 + 12 + 24 + 48 confirms it.

WATCH OUT: A ratio can be negative; the terms may alternate in sign.

C4 / KEY CONCEPT

Infinite sums need convergence / अनंत योग की शर्त

An infinite geometric sum is the limit of its partial sums. The term r^n tends to zero only when $|r| < 1$. In that case the finite-sum formula approaches $a/(1 - r)$. A nonzero geometric series with $|r| \geq 1$ does not have this finite sum.

अनंत गुणोत्तर योग तभी सीमित होता है जब $|r| < 1$ हो। तब आगे के पद शून्य की ओर जाते हैं। उदाहरण में अनुपात 1/3 है, इसलिए कुल दूरी 12/(1 - 1/3) = 18 मीटर है।

$S_\infty = a/(1 - r)$, provided $|r| < 1$.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

A ball travels 12 m, then 4 m, then 4/3 m, and so on. Find the total.

Solution: The distances form a GP with a = 12 and r = 1/3. The total is 12/(1 - 1/3) = 18 m.

WATCH OUT: Never use the infinite formula merely because dots appear.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Compare three means / तीन प्रकार के माध्य

For positive numbers, arithmetic mean measures an additive centre, geometric mean a multiplicative centre and harmonic mean a reciprocal centre. Positive inputs are essential for the standard inequality. An HP is a sequence whose reciprocals form an AP.

> धनात्मक संख्याओं के लिए समांतर माध्य कम-से-कम गुणोत्तर माध्य और गुणोत्तर माध्य कम-से-कम हरात्मक माध्य होता है। 4 और 16 के लिए ये क्रमशः 10,8,6.4 हैं। बराबरी केवल दोनों संख्याएँ समान होने पर होती है।

$A = (u + v)/2$; $G = \sqrt{(uv)}$; $H = 2uv/(u + v)$; $A \geq G \geq H$.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Find A,G,H for 4 and 16.

Solution: A = 10, G = 8 and H = 128/20 = 6.4. Thus $10 \geq 8 \geq 6.4$. Equality occurs only when the two inputs are equal.

WATCH OUT: The harmonic mean is not the reciprocal of the arithmetic mean.

C6 / KEY CONCEPT

Make cancellation work / निरसन से योग

A term written as a difference can telescope when summed. For polynomial terms, use the standard sums of integers, squares and cubes. For an arithmetic factor times a geometric factor, multiply the sum by the ratio and subtract to simplify the arithmetic factor.

> किसी पद को दो भिन्नों के अंतर में तोड़ने पर बीच के पद कट सकते हैं। उदाहरण में $1/[k(k + 1)] = 1/k - 1/(k + 1)$ है। आठ पद जोड़ने पर केवल $1 - 1/9$ बचता है, इसलिए योग 8/9 है।

$\Sigma k = n(n + 1)/2$; $\Sigma k^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$; $\Sigma k^3 = [n(n + 1)/2]^2$.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Find Σ from k = 1 to 8 of $1/[k(k + 1)]$.

Solution: Write $1/[k(k + 1)] = 1/k - 1/(k + 1)$. All interior terms cancel, leaving $1 - 1/9 = 8/9$.

WATCH OUT: Keep the final surviving term; cancellation does not mean the sum is zero.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C1

Find $a_1,\ldots,a_4$ if $a_n = n^2 + 2n$.

$a_n = n^2 + 2n$ हो तो पहले चार पद लिखिए।

Q02 • C1

If $S_n = 3n^2$, find a_n.

$S_n = 3n^2$ हो तो nth पद ज्ञात कीजिए।

Q03 • C2

Find the 15th term of 9,14,19,… .

9,14,19,… का 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

Q04 • C2

Find the sum of the first 20 terms of 2,5,8,… .

2,5,8,… के पहले 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

Q05 • C2

An AP has $a_4 = 17$ and $a_9 = 42$. Find a and d.

एक समांतर श्रेणी में $a_4 = 17$ और $a_9 = 42$ हैं। पहला पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

Q06 • C2

Insert three arithmetic means between 6 and 26.

6 और 26 के बीच तीन समांतर माध्य डालिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C3

Find the sixth term of 5,15,45,... .

5,15,45,... का छठा पद ज्ञात कीजिए।

Q08 • C3

Find 2 + 6 + 18 + 54 + 162.

2 + 6 + 18 + 54 + 162 का योग ज्ञात कीजिए।

Q09 • C4

Sum 9 - 3 + 1 - 1/3 + ... to infinity.

9 - 3 + 1 - 1/3 + ... का अनंत योग ज्ञात कीजिए।

Q10 • C5

Find A,G,H for 9 and 25.

9 और 25 का समांतर, गुणोत्तर और हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए।

Q11 • C6

Find Σ from k = 1 to 12 of k^2.

k = 1 से 12 तक k^2 का योग ज्ञात कीजिए।

Q12 • C6

Find Σ from k = 1 to 10 of 1/[(k + 1)(k + 2)].

k = 1 से 10 तक 1/[(k + 1)(k + 2)] का योग ज्ञात कीजिए।

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C1 • Read the rule behind a pattern

3,8,15,24 by substitution.

n = 1,2,3,4 रखने पर क्रमशः 3,8,15,24 मिलते हैं।

Q02 / C1 • Read the rule behind a pattern

$a_n = 3n^2 - 3(n - 1)^2 = 6n - 3$; the formula also gives $a_1 = 3$.

$S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 3(n - 1)^2 = 6n - 3$ है। पहला पद भी यही सूत्र देता है।

Q03 / C2 • Arithmetic change

a = 9,d = 5: $a_{15} = 9 + 14(5) = 79$.

a = 9 और d = 5 हैं। $a_{15} = 9 + 14 \times 5 = 79$ है।

Q04 / C2 • Arithmetic change

$S_{20} = 10[4 + 19(3)] = 610$.

$S_{20} = 20[2 \times 2 + 19 \times 3]/2 = 610$ है।

Q05 / C2 • Arithmetic change

5d = 25 gives d = 5; a + 3d = 17 gives a = 2.

दोनों पद घटाने पर 5d = 25 से d = 5 है। फिर a + 15 = 17 से a = 2 है।

Q06 / C2 • Arithmetic change

Five terms require four steps: d = 5. Insert 11,16,21.

पाँच पदों के बीच चार अंतर हैं। d = 20/4 = 5, अतः माध्य 11,16,21 हैं।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C3 • Geometric change

$5 \times 3^5 = 1215$.

पहला पद 5 और अनुपात 3 है। छठा पद $5 \times 3^5 = 1215$ है।

Q08 / C3 • Geometric change

GP sum = $2(3^5 - 1)/2 = 242$.

पाँच पदों का गुणोत्तर योग $2(3^5 - 1)/(3 - 1) = 242$ है।

Q09 / C4 • Infinite sums need convergence

$r = -1/3$, so $S\infty = 9/(1 + 1/3) = 27/4$.

$r = -1/3$ है और $|r| < 1$ है। अनंत योग $9/(1 + 1/3) = 27/4$ है।

Q10 / C5 • Compare three means

A = 17; G = 15; H = 450/34 = 225/17.

समांतर माध्य 17, गुणोत्तर माध्य 15 और हरात्मक माध्य 225/17 है।

Q11 / C6 • Make cancellation work

$12 \times 13 \times 25 / 6 = 650$.

वर्गों के योग का सूत्र देने पर $12 \times 13 \times 25 / 6 = 650$ मिलता है।

Q12 / C6 • Make cancellation work

The terms are $1/(k + 1) - 1/(k + 2)$. Sum = $1/2 - 1/12 = 5/12$.

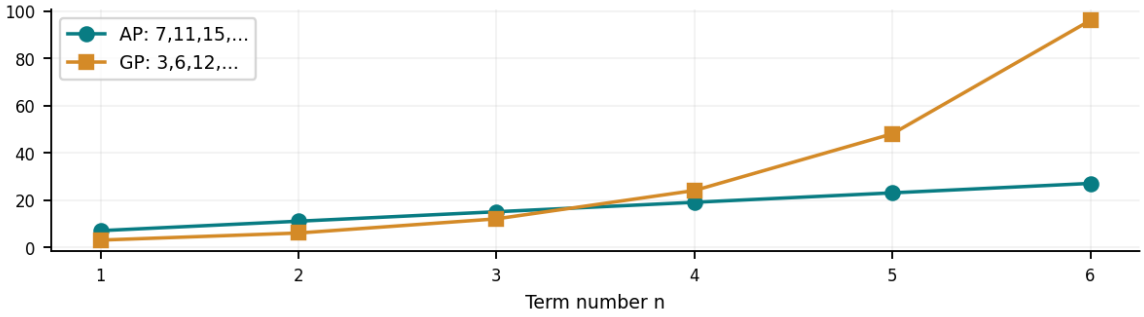
पद को $1/(k + 1) - 1/(k + 2)$ लिखें। बीच के पद कटने पर $1/2 - 1/12 = 5/12$ बचता है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C2-C3: constant differences and constant ratios produce different growth patterns.

Arithmetico-geometric sums

For $|r| < 1$, Σ from $k = 1$ to ∞ of $kr^k = r/(1 - r)^2$. Multiplying the sum by r and subtracting leaves a geometric series. With $r = 1/2$, the sum is 2.

Finite differences

A quadratic nth-term rule has constant second differences. For 2,6,12,20,..., first differences are 4,6,8,... and the rule $n(n + 1)$ fits; verify it from the specified generating rule, not from pattern alone.

Challenge

Three positive numbers in GP have product 216 and first term 3. Their middle term is 6 because its cube is 216. The ratio is 2 and the last term is 12.

अंकगणितीय और गुणोत्तर कारकों के गुणन वाली श्रेणी में अनुपात से गुणा करके घटाना उपयोगी है। स्थिर दूसरे अंतर द्विघात पद-सूत्र का संकेत देते हैं। चुनौती में बीच के पद का घन 216 है, अतः तीन पद 3,6,12 हैं।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you justify why a sum formula applies before substituting numbers?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?