MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

Permutations and Combinations 05

क्रमचय और संचय

Count choices without listing everything

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Decide whether order matters.
- Handle restrictions without overcounting.
- Count distributions and circular arrangements.

Before you start: Factorials and basic set operations.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Choose the counting operation जोड़ें या गुणा करें?	Q01, Q12
C2 p. 2	Order makes a permutation क्रम का महत्व	Q02, Q03, Q05
C3 p. 3	Selection ignores order चयन में क्रम नहीं	Q04, Q11
C4 p. 3	Build restrictions into the model प्रतिबंधों की गणना	Q06, Q07, Q08
C5 p. 4	Remove rotational duplicates वृत्तीय व्यवस्थाएँ	Q09
C6 p. 4	Distribute identical objects समान वस्तुओं का वितरण	Q10

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Choose the counting operation / जोड़ें या गुणा करें?

Use addition for disjoint alternatives and multiplication for consecutive choices. If cases overlap, separate them or subtract the overlap. A careful definition of one outcome is the most important step: decide what makes two outcomes different before selecting a formula.

> अलग-अलग विकल्पों में से एक चुनना हो तो जोड़ें। लगातार कई चरण पूरे करने हों तो गुणा करें। उदाहरण में भोजन बनाने के लिए मुख्य पकवान, साथ का पकवान और पेय तीनों चुनने हैं, इसलिए कुल 4 × 3 × 2 = 24 हैं।

m alternatives OR n disjoint alternatives: m + n; m choices THEN n choices: mn.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

A meal uses one of 4 mains, one of 3 sides and one of 2 drinks. How many meals?

Solution: There are 4 × 3 × 2 = 24 meals. Each complete choice gives a different ordered selection of components.

WATCH OUT: Multiplication does not require numerical probabilities or statistical independence.

C2 / KEY CONCEPT

Order makes a permutation / क्रम का महत्व

An ordered selection of r distinct objects from n uses n choices for the first position, n - 1 for the second, and so on. If repetition is allowed at every position, the count is n^r instead. Leading-zero restrictions must be handled separately in numbers.

> क्रम बदलने से परिणाम बदलता है तो क्रमचय उपयोग करें। बिना पुनरावृत्ति हर स्थान पर उपलब्ध विकल्प घटते हैं। उदाहरण में चार अंकों की संख्या के लिए 6 × 5 × 4 × 3 = 360 विकल्प हैं। शून्य उपलब्ध हो तो पहले स्थान की अलग जाँच करें।

P(n,r) = n!/(n - r)!; 0! = 1.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

How many four-digit numbers use 1,2,3,4,5,6 without repetition?

Solution: All six digits can be first because none is zero. The count is 6 × 5 × 4 × 3 = 360.

WATCH OUT: A code may begin with zero; a four-digit number cannot.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Selection ignores order / चयन में क्रम नहीं

When only membership matters, each r-element selection has r! internal orders. Divide the ordered count by r! to avoid counting the same group repeatedly. If roles such as captain are later assigned, make that a separate stage.

> समूह के सदस्यों का क्रम महत्वहीन हो तो संचय प्रयोग करें। आठ में से तीन का समूह 56 तरह से बनता है। हर समूह में कप्तान के तीन विकल्प हैं, इसलिए कुल 168 परिणाम हैं। समूह चुनना और भूमिका देना अलग चरण हैं।

$C(n,r) = n!/[r!(n - r)!]$; $C(n,r) = C(n,n - r)$.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Choose a team of 3 from 8 learners and then select its captain.

Solution: There are $C(8,3) = 56$ teams and 3 captain choices per team: 168 outcomes.

WATCH OUT: Do not divide by r! when the positions or roles are distinct.

C4 / KEY CONCEPT

Build restrictions into the model / प्रतिबंधों की गणना

For objects that must remain together, treat the group as one block, then arrange within it. For objects that must be separated, first place the other objects and choose available gaps. Identical repeated objects require division by factorials of their multiplicities.

> साथ रखने वाली वस्तुओं को एक ब्लॉक मानें और उसके अंदर की व्यवस्थाएँ भी गिनें। समान वस्तुओं के आदान-प्रदान से नया परिणाम नहीं मिलता। LEVEL में दो L और दो E हैं, इसलिए 5! को 2! × 2! से भाग देकर 30 मिलता है।

Arrangements of n objects with repeats $n_1, n_2, \ldots$: $n!/(n_1!n_2!\ldots)$.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

How many distinct arrangements does LEVEL have?

Solution: There are five letters, with two Ls and two Es. The count is $5!/(2!2!) = 30$.

WATCH OUT: A block still has internal orders unless its members are identical.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Remove rotational duplicates / वृत्तीय व्यवस्थाएँ

For n distinct people around a round table, rotations describe the same seating. Fix one person and arrange the remaining n - 1. Reflections are still different unless the problem explicitly identifies them, as in some necklace settings.

> गोल मेज पर केवल घुमाने से नई बैठक नहीं बनती। एक व्यक्ति स्थिर रखकर शेष को व्यवस्थित करें। उदाहरण में A और B का ब्लॉक बनाने पर पाँच इकाइयाँ हैं; वृत्तीय व्यवस्थाएँ 4! और ब्लॉक के अंदर 2 क्रम हैं, कुल 48।

Round-table arrangements = (n - 1)! for n ≥ 1.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Seat 6 people around a round table with A and B adjacent.

Solution: Treat A,B as a block. Five circular units give 4! orders; the pair has 2 internal orders. Total = 48.

WATCH OUT: Do not use n! if rotating every person gives the same arrangement.

C6 / KEY CONCEPT

Distribute identical objects / समान वस्तुओं का वितरण

Stars and bars counts nonnegative integer solutions by placing separators among identical objects. If each recipient must receive at least one, first allocate one each. Upper bounds can require subtraction of forbidden cases through inclusion-exclusion.

> समान वस्तुओं को नामांकित डिब्बों में बाँटने के लिए तारों और विभाजकों का तरीका उपयोग करें। खाली डिब्बे मान्य हों तो शून्य भी स्वीकार्य है। उदाहरण में 7 वस्तुएँ और 2 विभाजक हैं, इसलिए C(9,2) = 36 वितरण हैं।

$x_1 + \ldots + x_r = n$, $x_i \geq 0$: $C(n + r - 1, r - 1)$.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Distribute 7 identical counters among 3 labelled boxes, allowing empty boxes.

Solution: Seven stars and two separators give C(9,2) = 36 distributions. The labels matter, so different box totals are distinct.

WATCH OUT: This formula is not for distributing distinct objects.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C1

A shop has 5 notebooks and 4 pens. How many choices of one of each?

दुकान में 5 अलग कॉपियाँ और 4 अलग पेन हैं। एक कॉपी और एक पेन चुनने के कितने तरीके हैं?

Q02 • C2

How many 3-letter codes can use A,B,C,D with repetition?

A,B,C,D से पुनरावृत्ति सहित तीन अक्षरों के कितने कोड बनेंगे?

Q03 • C2

How many 3-digit numbers use 0,1,2,3,4 without repetition?

0,1,2,3,4 से बिना पुनरावृत्ति तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनेंगी?

Q04 • C3

Choose 4 books from 9 different books.

9 अलग पुस्तकों में से 4 चुनने के कितने तरीके हैं?

Q05 • C2

Select president and secretary from 7 people.

7 व्यक्तियों में से अध्यक्ष और सचिव चुनने के कितने तरीके हैं?

Q06 • C4

Count distinct arrangements of BANANA.

BANANA के अक्षरों की कितनी अलग व्यवस्थाएँ हैं?

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C4

Arrange 5 distinct books in a row with two specified books together.

5 अलग पुस्तकों में दो निश्चित पुस्तकों को साथ रखते हुए पंक्ति में कितनी व्यवस्थाएँ हैं?

Q08 • C4

Arrange 5 distinct books with two specified books not adjacent.

उन्हीं 5 पुस्तकों में दो निश्चित पुस्तकें पास-पास न हों तो कितनी व्यवस्थाएँ हैं?

Q09 • C5

Seat 7 distinct people at a round table, identifying rotations only.

7 अलग व्यक्तियों को गोल मेज पर कितने तरीकों से बैठाएँगे, यदि केवल घुमाव समान माने जाएँ?

Q10 • C6

Distribute 8 identical tokens among 3 labelled boxes with at least one in each.

8 समान टोकन 3 नामांकित डिब्बों में बाँटिए। हर डिब्बे में कम-से-कम एक हो तो कितने वितरण हैं?

Q11 • C3

Choose 3 from 5 women and 4 men with at least one woman.

5 महिलाओं और 4 पुरुषों में से 3 चुनिए। कम-से-कम एक महिला हो तो कितने समूह हैं?

Q12 • C1

Find the number of shortest right/up grid paths from (0,0) to (4,3).

(0,0) से (4,3) तक केवल दाएँ या ऊपर जाकर कितने सबसे छोटे ग्रिड-पथ हैं?

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C1 • Choose the counting operation

5 × 4 = 20.

कॉपी के 5 और पेन के 4 विकल्प हैं। दोनों चुनने के 20 तरीके हैं।

Q02 / C2 • Order makes a permutation

$4^3 = 64$.

हर स्थान पर 4 विकल्प हैं। कुल $4^3 = 64$ कोड हैं।

Q03 / C2 • Order makes a permutation

4 choices for the hundreds place, then 4 and 3: 48.

पहले स्थान पर शून्य नहीं होगा, इसलिए 4 विकल्प हैं। फिर 4 और 3 विकल्प: कुल 48।

Q04 / C3 • Selection ignores order

C(9,4) = 126.

क्रम महत्वहीन है, इसलिए C(9,4) = 126 चयन हैं।

Q05 / C2 • Order makes a permutation

Distinct roles: P(7,2) = 7 × 6 = 42.

दो भूमिकाएँ अलग हैं। पहले 7 और फिर 6 विकल्प हैं, कुल 42।

Q06 / C4 • Build restrictions into the model

6!/(3!2!) = 60.

तीन A और दो N समान हैं। 6!/(3!2!) = 60 व्यवस्थाएँ हैं।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C4 • Build restrictions into the model

Treat the pair as one unit: 4! × 2 = 48.

दो पुस्तकों का ब्लॉक बनाने पर चार इकाइयाँ हैं। 4! × 2 = 48 व्यवस्थाएँ हैं।

Q08 / C4 • Build restrictions into the model

All 5! orders minus 48 adjacent orders gives 72.

कुल 120 में से साथ रहने वाली 48 घटाएँ। शेष 72 हैं।

Q09 / C5 • Remove rotational duplicates

(7 - 1)! = 720.

घुमाव समान हैं, इसलिए एक व्यक्ति स्थिर रखें। शेष 6! = 720 हैं।

Q10 / C6 • Distribute identical objects

Allocate one each; distribute 5 remaining: C(7,2) = 21.

पहले तीनों डिब्बों में एक-एक दें। शेष 5 का वितरण C(7,2) = 21 है।

Q11 / C3 • Selection ignores order

C(9,3) - C(4,3) = 84 - 4 = 80.

सभी समूहों में से केवल पुरुषों वाले घटाएँ: C(9,3) - C(4,3) = 80।

Q12 / C1 • Choose the counting operation

Arrange 4 right and 3 up steps: C(7,3) = 35.

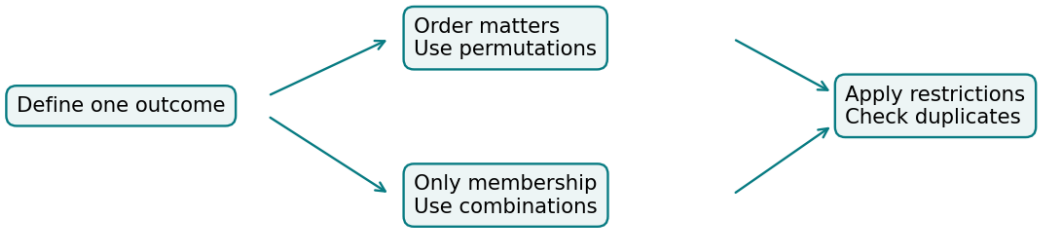
चार दाएँ और तीन ऊपर कदमों का क्रम चुनें। C(7,3) = 35 रास्ते हैं।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C1-C4: define the outcome before choosing a counting formula.

Derangements

A derangement has no object in its original position. Inclusion-exclusion gives $D_n = n!\ \Sigma$ from k = 0 to n of $(-1)^k/k!$. For four distinct objects, $D_4 = 24 - 24 + 12 - 4 + 1 = 9$.

Prime exponents in factorials

The exponent of a prime p in n! is floor(n/p) + floor(n/p²) + … . In 20!, the exponent of 5 is 4 and that of 2 is 18, so there are 4 trailing zeros.

Challenge

Split 6 distinct students into two unlabelled groups of 3. Choosing one group gives C(6,3), but each split is counted twice. Answer: C(6,3)/2 = 10.

विस्थापन में कोई वस्तु अपने पुराने स्थान पर नहीं रहती। भाज्य में अभाज्य की घात निकालने के लिए उसके घातों से भाग देकर पूर्णांक भाग जोड़ते हैं। चुनौती में दो समूहों के नाम नहीं हैं, इसलिए C(6,3) को 2 से भाग देकर 10 मिलता है।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you explain in one sentence why you multiplied or divided at each step?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?