MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

06

Binomial Expansion

द्विपद प्रसार

Coefficients, terms and useful approximations

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Locate a required term without expanding everything.
- Use coefficient identities strategically.
- Distinguish finite expansions from convergent series.

Before you start: Combinations and integer powers.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Build the expansion by choosing चयन से प्रसार समझें	Q01
C2 p. 2	Target a term by its exponent वांछित घात वाला पद	Q02, Q03, Q04
C3 p. 3	Find constant and middle terms अचर और मध्य पद	Q05, Q06, Q07
C4 p. 3	Turn coefficients into sums गुणांकों के योग	Q08, Q09, Q10
C5 p. 4	Compare neighbouring terms लगातार पदों की तुलना	Q11
C6 p. 4	Extend to non-integer powers गैर-पूर्णांक घातों का प्रसार	Q12

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Build the expansion by choosing / चयन से प्रसार समझें

In multiplying n copies of (a + b), each product term selects b from some factors and a from the rest. Choosing r factors for b gives C(n,r). This counting argument explains both the coefficient and the powers, for nonnegative integer n.

(a + b) की n प्रतियों में से r जगह b चुनने के C(n,r) तरीके हैं। यही गुणांक बनता है। उदाहरण में $(x + 3)^4$ के गुणांक निकालते समय 3 की घातों को भी शामिल करें; केवल पास्कल के गुणांक लिखना पर्याप्त नहीं है।

$(a + b)^n = \Sigma$ from r = 0 to n of $C(n,r)a^{n-r}b^r$.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

Expand $(x + 3)^4$.

Solution: The coefficients are 1,4,6,4,1. The result is $x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$.

WATCH OUT: The coefficient of a power includes constants raised to powers.

C2 / KEY CONCEPT

Target a term by its exponent / वांछित घात वाला पद

The general term avoids a full expansion. Substitute the two expressions into the term formula, simplify the power of x, and equate its exponent to the target. The resulting r must be an integer from 0 to n.

पूरे प्रसार के बजाय सामान्य पद लिखें और x की घात को आवश्यक घात के बराबर रखें। उदाहरण में $(2 + x)^6$ के लिए x^3 मिलने पर r = 3 है। गुणांक $C(6,3) \times 2^3 = 160$ है।

$T_{r+1} = C(n,r)a^{n-r}b^r$.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

Find the coefficient of x^3 in $(2 + x)^6$.

Solution: The x power is r, so r = 3. The coefficient is $C(6,3)2^3 = 20 \times 8 = 160$.

WATCH OUT: The index r corresponds to term number r + 1.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Find constant and middle terms / अचर और मध्य पद

A constant term has total exponent zero. A standard binomial expansion has n + 1 terms before any special simplification. If n is even there is one middle term; if n is odd there are two. Locate their positions before substituting.

> अचर पद के लिए x की कुल घात शून्य रखें। उदाहरण में कुल घात 12 - 3r है, इसलिए r = 4 और अचर पद 15 है। यदि r पूर्णांक न मिले तो वह पद मौजूद नहीं होगा।

n even: middle $T_{n/2 + 1}$; n odd: middle $T_{(n + 1)/2}$ and $T_{(n + 3)/2}$.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Find the constant term of $(x^2 + 1/x)^6$, $x \neq 0$.

Solution: The general x power is 2(6 - r) - r = 12 - 3r. Setting it to zero gives r = 4. The constant is C(6,4) = 15.

WATCH OUT: A non-integer r means the requested power is absent.

C4 / KEY CONCEPT

Turn coefficients into sums / गुणांकों के योग

For a polynomial P(x), P(1) is the sum of its coefficients, while P(-1) is the alternating sum. Adding or subtracting these values isolates even- or odd-power coefficients. Pascal's identity combines neighbouring binomial coefficients.

> सभी गुणांकों का योग चाहिए तो x = 1 रखें। वैकल्पिक चिह्न वाला योग चाहिए तो x = -1 रखें। उदाहरण में $(3x - 2)^5$ के गुणांकों का योग $(3 - 2)^5 = 1$ है।

C(n,r) + C(n,r - 1) = C(n + 1,r).

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

Find the sum of coefficients of $(3x - 2)^5$.

Solution: Substitute x = 1: $(3 - 2)^5 = 1$. For comparison, its alternating coefficient sum is $P(-1) = (-5)^5 = -3125$.

WATCH OUT: The sum of coefficients is not the same as the sum of their absolute values.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Compare neighbouring terms / लगातार पदों की तुलना

For positive a,b, the ratio of successive binomial terms identifies where terms increase and decrease. A ratio equal to 1 gives equal adjacent terms. For signed or complex terms, comparing sizes requires absolute values and a separate interpretation.

> धनात्मक पदों में अगले और पिछले पद का अनुपात बताएगा कि पद बढ़ रहे हैं या घट रहे हैं। अनुपात 1 हो तो लगातार दो पद समान हैं। $(1 + x)^8$ का सबसे बड़ा गुणांक बीच में C(8,4) = 70 है।

$T_{r+2}/T_{r+1} = [(n - r)/(r + 1)](b/a)$, for a,b > 0.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Find the largest coefficient in $(1 + x)^8$.

Solution: The binomial coefficients are symmetric and grow toward the centre. The middle coefficient C(8,4) = 70 is the largest.

WATCH OUT: Largest coefficient and largest numerical term are different questions.

C6 / KEY CONCEPT

Extend to non-integer powers / गैर-पूर्णांक घातों का प्रसार

For a real exponent α, the binomial series is generally infinite. Around x = 0 it converges for $|x| < 1$. Truncation gives an approximation, not an exact identity. First factor an expression to put it in the form constant × $(1 + u)^\alpha$ with small $|u|$.

> भिन्न या ऋणात्मक घात के लिए प्रसार सामान्यतः अनंत होता है। $|x| < 1$ की शर्त में शुरुआती पद सन्निकटन देते हैं। √1.04 के लिए 1 + 0.02 - 0.0002 = 1.0198 मिलता है; यह ठीक-ठीक समानता नहीं है।

$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1)x^2/2 + \ldots$, $|x| < 1$.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Approximate √1.04 through the quadratic term.

Solution: Use α = 1/2 and x = 0.04: $1 + 0.02 - (0.04)^2/8 = 1.0198$. This is a truncated approximation.

WATCH OUT: The finite integer theorem does not require $|x| < 1$; the general infinite series does.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C1

Expand $(x - 2)^3$.

$(x - 2)^3$ का प्रसार कीजिए।

Q02 • C2

Find the coefficient of x^2 in $(1 + 3x)^5$.

$(1 + 3x)^5$ में x^2 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q03 • C2

Find the fourth term of $(2x + 1)^5$.

$(2x + 1)^5$ का चौथा पद ज्ञात कीजिए।

Q04 • C2

Find the coefficient of x^5 in $(x^2 + 2x)^4$.

$(x^2 + 2x)^4$ में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q05 • C3

Find the constant term in $(x + 2/x)^8$.

$(x + 2/x)^8$ का अचर पद ज्ञात कीजिए।

Q06 • C3

Find the middle term of $(a + b)^6$.

$(a + b)^6$ का मध्य पद ज्ञात कीजिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C3

Find the two middle terms of $(1 + x)^7$.

$(1 + x)^7$ के दोनों मध्य पद ज्ञात कीजिए।

Q08 • C4

Find the sum of coefficients of $(2x + 3)^4$.

$(2x + 3)^4$ के गुणांकों का योग ज्ञात कीजिए।

Q09 • C4

Find the sum of even-power coefficients of $(1 + x)^9$.

$(1 + x)^9$ में सम घातों के गुणांकों का योग ज्ञात कीजिए।

Q10 • C4

Evaluate $C(10,3) + C(10,4)$.

$C(10,3) + C(10,4)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q11 • C5

Find the largest coefficient in $(1 + x)^{10}$.

$(1 + x)^{10}$ का सबसे बड़ा गुणांक ज्ञात कीजिए।

Q12 • C6

Approximate $(1.02)^{-1}$ through x^2 in $(1 + x)^{-1}$.

$(1 + x)^{-1}$ के x^2 तक के पद लेकर $(1.02)^{-1}$ का सन्निकटन निकालिए।

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C1 • Build the expansion by choosing

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

द्विपद सूत्र से $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ मिलता है।

Q02 / C2 • Target a term by its exponent

$C(5,2)3^2 = 90$.

$r = 2$ होने पर गुणांक $C(5,2) \times 3^2 = 90$ है।

Q03 / C2 • Target a term by its exponent

$r = 3$: $C(5,3)(2x)^2 = 40x^2$.

चौथे पद में $r = 3$ है। $C(5,3)(2x)^2 = 40x^2$ मिलता है।

Q04 / C2 • Target a term by its exponent

General power is $8 - r$. Set $r = 3$: $C(4,3)2^3 = 32$.

कुल घात $8 - r$ को 5 रखें, इसलिए $r = 3$। गुणांक $C(4,3)2^3 = 32$ है।

Q05 / C3 • Find constant and middle terms

$8 - 2r = 0$ gives $r = 4$. Constant = $C(8,4)2^4 = 1120$.

घात $8 - 2r = 0$ से $r = 4$ है। अचर पद $C(8,4)2^4 = 1120$ है।

Q06 / C3 • Find constant and middle terms

Fourth term, $r = 3$: $20a^3b^3$.

सात पदों में चौथा मध्य है। उत्तर $20a^3b^3$ है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C3 • Find constant and middle terms

Fourth and fifth terms: $35x^3$ and $35x^4$.

आठ पदों में चौथा और पाँचवाँ मध्य हैं। उत्तर $35x^3$ और $35x^4$ हैं।

Q08 / C4 • Turn coefficients into sums

Substitute x = 1: $5^4 = 625$.

x = 1 रखने पर $(2 + 3)^4 = 625$ मिलता है।

Q09 / C4 • Turn coefficients into sums

[P(1) + P(-1)]/2 = (512 + 0)/2 = 256.

सम घातों का योग [P(1) + P(-1)]/2 = 512/2 = 256 है।

Q10 / C4 • Turn coefficients into sums

Pascal's identity gives C(11,4) = 330.

पास्कल संबंध से C(11,4) = 330 मिलता है।

Q11 / C5 • Compare neighbouring terms

C(10,5) = 252.

बीच का गुणांक C(10,5) = 252 सबसे बड़ा है।

Q12 / C6 • Extend to non-integer powers

1 - 0.02 + 0.0004 = 0.9804; this is an approximation.

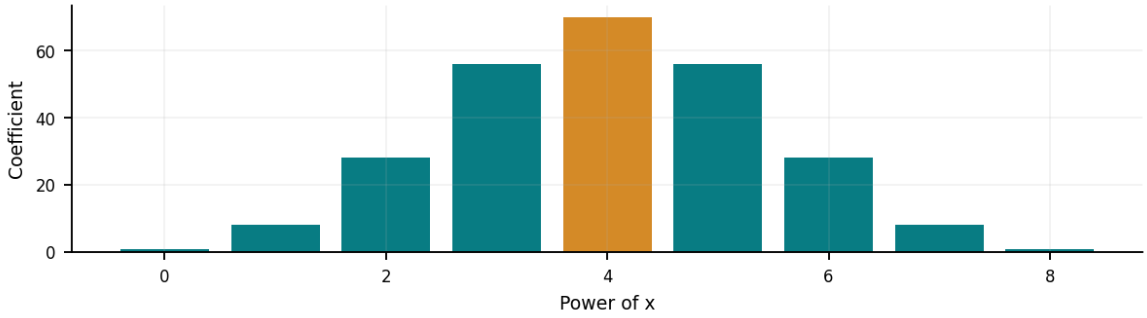
$1 - x + x^2$ में x = 0.02 रखें। सन्निकटन 0.9804 है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C5: coefficients of $(1 + x)^8$ are symmetric; the central value is 70.

Weighted sums

Differentiating the polynomial identity $(1 + x)^n$ and substituting $x = 1$ gives $\Sigma\ rC(n,r) = n2^{n-1}$ for $n \geq 1$. A counting proof counts subsets with one marked member.

Products of expansions

To find the coefficient of x^m in $P(x)Q(x)$, pair powers whose exponents add to m. For $(1 + x)^3(1 + x)^4$, combining first gives $(1 + x)^7$, so the x^2 coefficient is 21.

Challenge

Find the remainder when 11^5 is divided by 100. In $(10 + 1)^5$, terms containing 10^2 vanish modulo 100. The remainder is 1 + 50 = 51.

भारित गुणांक-योग के लिए अवकलन या चिह्नित सदस्य वाली गणना उपयोगी है। दो प्रसारों के गुणन में केवल वही घातें जोड़ें जिनका योग लक्ष्य घात हो। चुनौती में 100 से विभाजन पर 10^2 वाले पद हट जाते हैं; शेषफल 51 है।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you state the permitted values of r before calculating a requested term?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?