MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

07

Trigonometry

त्रिकोणमिति

Angles, identities, equations and applications

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Connect angle measures to the unit circle.
- Choose identities that simplify a problem.
- Find all solutions in a stated interval.

Before you start: Algebra, circles and coordinate signs.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Measure rotation कोण का मापन	Q01, Q02
C2 p. 2	Use the unit circle इकाई वृत्त	Q03, Q04
C3 p. 3	Combine angles कोणों का योग	Q05, Q06
C4 p. 3	Read periodic behaviour आवर्तिता और परास	Q07
C5 p. 4	Solve every branch सभी हल खोजें	Q08, Q09, Q10
C6 p. 4	Apply ratios and bounds अनुप्रयोग और सीमाएँ	Q11, Q12

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Measure rotation / कोण का मापन

Positive angles turn anticlockwise and negative angles clockwise. Radians compare arc length with radius and are essential in arc and sector formulas. Convert degrees to radians before applying those formulas. One full turn is 360° or 2π radians.

रेडियन चाप की लंबाई और त्रिज्या का अनुपात है। चाप और त्रिज्यखंड के सूत्रों में कोण रेडियन में होना चाहिए। उदाहरण में 80° = 4π/9 रेडियन है। 9 से गुणा करने पर चाप की लंबाई 4π सेंटीमीटर मिलती है।

θ radians = θ degrees × π/180; arc length s = rθ; sector area = r²θ/2.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

Find the arc length of a circle of radius 9 cm subtending 80°.

Solution: Convert 80° to 4π/9 radians. Then s = 9 × 4π/9 = 4π cm. The sector area is 18π cm².

WATCH OUT: The arc formula does not accept a degree value directly.

C2 / KEY CONCEPT

Use the unit circle / इकाई वृत्त

The point reached by angle θ on the unit circle is (cos θ, sin θ). This definition extends trigonometric ratios beyond acute triangles. Coordinate signs identify quadrant signs. Tangent is sin θ/cos θ only where cos θ ≠ 0.

इकाई वृत्त पर बिंदु के निर्देशांक (cos θ, sin θ) हैं। चतुर्थांश से चिह्न तय होता है। उदाहरण में sin θ = 5/13 और दूसरा चतुर्थांश है; इसलिए cos θ = -12/13 और tan θ = -5/12 हैं।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ where defined.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

If sin θ = 5/13 and θ is in quadrant II, find cos θ and tan θ.

Solution: $\cos^2\theta = 1 - 25/169 = 144/169$. Quadrant II makes cos θ negative, so cos θ = -12/13 and tan θ = -5/12.

WATCH OUT: A square-root calculation alone cannot determine the sign.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Combine angles / कोणों का योग

Addition formulas convert sums of angles into products of simpler ratios. Double-angle formulas follow by choosing equal angles. For half-angle formulas, determine the sign from the half-angle's quadrant. Product-to-sum formulas are useful when multiplying oscillating expressions.

> योग-सूत्र किसी कठिन कोण को दो सरल कोणों में बाँटते हैं। उदाहरण में 75° = 45° + 30° रखें। साइन के योग-सूत्र में दोनों गुणनफल जोड़ने से (√6 + √2)/4 मिलता है। कोसाइन के योग-सूत्र में बीच का चिह्न ऋण होता है।

sin(A + B) = sin A cos B + cos A sin B; cos(A + B) = cos A cos B - sin A sin B.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Find sin 75° exactly.

Solution: Use 75° = 45° + 30°. The result is (√2/2)(√3/2) + (√2/2)(1/2) = (√6 + √2)/4.

WATCH OUT: cos(A + B) has a minus sign between its two products.

C4 / KEY CONCEPT

Read periodic behaviour / आवर्तिता और परास

Sine and cosine repeat after 2π; tangent repeats after π. For y = A sin(bx + c) + d with A,b ≠ 0, amplitude is |A|, period is 2π/|b| and vertical centre is d. The horizontal shift is -c/b.

> साइन और कोसाइन का मूल आवर्तकाल 2π है। इनपुट को 2 से गुणा करने पर आवर्तकाल आधा हो जाता है। 3 sin(2x) - 1 का मान -4 से 2 तक जाता है, इसलिए परास [-4,2] और आवर्तकाल π है।

sin 2x = 2 sin x cos x; cos 2x = 1 - 2 sin²x = 2 cos²x - 1.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

State the range and period of y = 3 sin(2x) - 1.

Solution: Since -1 ≤ sin(2x) ≤ 1, the range is [-4,2]. Doubling the input halves the period to π.

WATCH OUT: Amplitude is nonnegative; a negative coefficient also reflects the graph.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Solve every branch / सभी हल खोजें

For sin x = sin α, one family is x = α + 2kπ and another is x = π - α + 2kπ. Cosine gives x = ±α + 2kπ. Tangent gives x = α + kπ. Always restrict the final families to the requested interval and retain original domain exclusions.

त्रिकोणमितीय समीकरण में अक्सर एक से अधिक कोण उत्तर होते हैं। पहले मूल कोण, फिर सही चतुर्थांश और अंत में दिए गए अंतराल को देखें। उदाहरण में sin x = √3/2 के लिए [0,2π) पर π/3 और 2π/3 दोनों मान हैं।

sin x = sin α ⇒ x = kπ + (-1)^{k}α, k an integer.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Solve 2 sin x = √3 on 0 ≤ x < 2π.

Solution: sin x = √3/2 is positive in quadrants I and II. The two solutions are π/3 and 2π/3.

WATCH OUT: Dividing by sin x can discard solutions where sin x = 0.

C6 / KEY CONCEPT

Apply ratios and bounds / अनुप्रयोग और सीमाएँ

A height-and-distance diagram turns a word problem into a right triangle. Label horizontal and vertical distances and choose a suitable ratio. For expressions a sin x + b cos x, the amplitude √(a² + b²) gives the maximum absolute value over all real x.

a sin x + b cos x को एक स्थानांतरित साइन के रूप में लिख सकते हैं। इसका आयाम √(a² + b²) है। उदाहरण में √(25 + 144) = 13, इसलिए सभी वास्तविक x पर अधिकतम 13 और न्यूनतम -13 है।

-√(a² + b²) ≤ a sin x + b cos x ≤ √(a² + b²).

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Find the maximum of 5 sin x + 12 cos x.

Solution: Write it as 13 sin(x + φ), with cos φ = 5/13 and sin φ = 12/13. Its maximum is 13 and minimum is -13.

WATCH OUT: A restricted interval may not contain the point giving the global maximum.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C1
Convert 150° to radians.
150° को रेडियन में बदलिए।

Q02 • C1
Find the arc length for r = 8 cm and θ = 3π/4.
r = 8 सेंटीमीटर और θ = 3π/4 के लिए चाप की लंबाई निकालिए।

Q03 • C2
Find cos θ if sin θ = 8/17 and θ is in quadrant II.
sin θ = 8/17 तथा θ दूसरे चतुर्थांश में है। cos θ ज्ञात कीजिए।

Q04 • C2
Evaluate tan 225°.
tan 225° का मान ज्ञात कीजिए।

Q05 • C3
Find cos 75° exactly.
cos 75° का सटीक मान ज्ञात कीजिए।

Q06 • C3
If sin x = 3/5 and x is acute, find sin 2x.
sin x = 3/5 तथा x तीव्र कोण है। sin 2x ज्ञात कीजिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C4

State the range and period of $y = 2\cos(3x) + 4$.

$y = 2\cos(3x) + 4$ का परास और आवर्तकाल बताइए।

Q08 • C5

Solve $\cos x = -1/2$ on $[0,2\pi)$.

$[0,2\pi)$ पर $\cos x = -1/2$ हल कीजिए।

Q09 • C5

Solve $\sin 2x = 0$ on $[0,2\pi)$.

$[0,2\pi)$ पर $\sin 2x = 0$ हल कीजिए।

Q10 • C5

Solve $\tan x = \sqrt{3}$ for all real x where defined.

जहाँ परिभाषित हो, वहाँ सभी वास्तविक x के लिए $\tan x = \sqrt{3}$ का हल लिखिए।

Q11 • C6

A tower is viewed from 30 m away at elevation 30°. Find its height, assuming level ground and ground-level observation.

समतल भूमि पर मीनार से 30 मीटर दूर, भूमि-स्तर से उसका उन्नयन कोण 30° है। ऊँचाई निकालिए।

Q12 • C6

Find the maximum and minimum of $8\sin x - 15\cos x$.

$8\sin x - 15\cos x$ के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C1 • Measure rotation

150π/180 = 5π/6.

डिग्री को π/180 से गुणा करें। 150° = 5π/6 रेडियन है।

Q02 / C1 • Measure rotation

s = rθ = 6π cm.

s = rθ = 8 × 3π/4 = 6π सेंटीमीटर है।

Q03 / C2 • Use the unit circle

cos θ = -√(1 - 64/289) = -15/17.

कोसाइन का परिमाण 15/17 है, पर दूसरे चतुर्थांश में चिह्न ऋणात्मक होगा। उत्तर -15/17 है।

Q04 / C2 • Use the unit circle

225° = 180° + 45°; tangent has period 180°, so the value is 1.

टैन्जेंट का आवर्तकाल 180° है। tan 225° = tan 45° = 1 है।

Q05 / C3 • Combine angles

cos(45° + 30°) = (√6 - √2)/4.

cos(45° + 30°) के सूत्र से (√6 - √2)/4 मिलता है।

Q06 / C3 • Combine angles

cos x = 4/5, so 2 sin x cos x = 24/25.

तीव्र कोण होने से cos x = 4/5 है। sin 2x = 2 × 3/5 × 4/5 = 24/25 है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C4 • Read periodic behaviour

Range [2,6]; period 2π/3.

कोसाइन -1 से 1 तक है। परास [2,6] और आवर्तकाल 2π/3 है।

Q08 / C5 • Solve every branch

x = 2π/3,4π/3.

कोसाइन दूसरे और तीसरे चतुर्थांश में ऋणात्मक है। हल 2π/3 और 4π/3 हैं।

Q09 / C5 • Solve every branch

2x = kπ gives x = 0,π/2,π,3π/2.

2x = kπ से x = kπ/2 है। अंतराल में 0,π/2,π,3π/2 मिलते हैं।

Q10 / C5 • Solve every branch

x = π/3 + kπ, k an integer.

मूल कोण π/3 है। टैन्जेंट के आवर्तकाल से x = π/3 + kπ, जहाँ k पूर्णांक है।

Q11 / C6 • Apply ratios and bounds

h/30 = tan 30° = 1/√3, so h = 10√3 m.

ऊँचाई/30 = tan 30° = 1/√3 है। ऊँचाई 10√3 मीटर है।

Q12 / C6 • Apply ratios and bounds

Amplitude √(64 + 225) = 17; maximum 17, minimum -17.

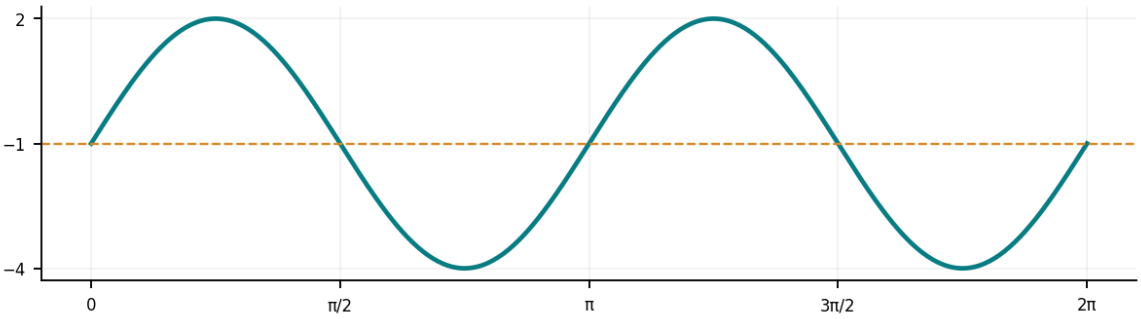
आयाम $\sqrt{(8^2 + 15^2)} = 17$ है। अधिकतम 17 और न्यूनतम -17 हैं।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C4: y = 3 sin(2x) - 1 completes two cycles on [0,2π].

Products and sums

2 sin A cos B = sin(A + B) + sin(A - B). Also 2 cos A cos B = cos(A + B) + cos(A - B). These identities can make a long sum telescope.

Trigonometric inequalities

For sin x ≥ 1/2 on [0,2π], the unit circle gives x in [π/6,5π/6]. For all real x, add 2kπ to both endpoints for every integer k.

Challenge

Solve 2 sin²x - 3 sin x + 1 = 0 on [0,2π). Factor (2 sin x - 1)(sin x - 1). The solutions are π/6, π/2 and 5π/6.

गुणनफल को योग में बदलने वाले सूत्र लंबी श्रेणियों में निरसन करा सकते हैं। असमिका के लिए इकाई वृत्त पर पूरा चाप चुनें। चुनौती में sin x का मान 1/2 या 1 है; इसलिए तीन हल π/6, π/2 और 5π/6 हैं।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you state the angle unit, interval and excluded denominator zeros before solving?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?