MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

09

Circles

वृत्त

Centres, chords, tangents and circle families

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Convert between general and centre-radius forms.
- Distinguish a secant from a tangent.
- Use power and radical axes in multi-circle problems.

Before you start: Straight-line equations and distances.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Recover the centre केंद्र और त्रिज्या	Q01, Q02
C2 p. 2	Build a circle from geometry ज्यामिति से समीकरण	Q03, Q04
C3 p. 3	Compare line distance with radius रेखा और वृत्त की स्थिति	Q05, Q06
C4 p. 3	Tangents are perpendicular to radii स्पर्शरेखा और अभिलंब	Q07, Q08
C5 p. 4	Use the power of a point बिंदु की घात	Q09, Q10
C6 p. 4	Subtract circles to find equal power मूलाक्ष और वृत्त-परिवार	Q11, Q12

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Recover the centre / केंद्र और त्रिज्या

A circle is the locus of points at a fixed positive distance from a centre. In the general equation the coefficients of x^2 and y^2 are equal and there is no xy term. Completing squares identifies the centre and shows whether a real circle exists.

वृत्त के हर बिंदु की केंद्र से दूरी स्थिर होती है। सामान्य समीकरण में पूर्ण वर्ग बनाकर केंद्र और त्रिज्या निकालें। उदाहरण में $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ मिलता है, इसलिए केंद्र (3,-2) और त्रिज्या 5 है।

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ has centre $(-g,-f)$.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

Find the centre and radius of $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

Solution: Complete squares: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$. The centre is (3,-2) and radius is 5.

WATCH OUT: $r^2 = 0$ is a single point; $r^2 < 0$ gives no real points.

C2 / KEY CONCEPT

Build a circle from geometry / ज्यामिति से समीकरण

A centre and radius immediately give the equation. If a diameter's endpoints are known, their midpoint is the centre and half their separation is the radius. Three noncollinear points determine a unique circle; collinear points do not determine a finite circle.

व्यास के सिरों का मध्यबिंदु केंद्र होता है और उनके बीच की दूरी का आधा त्रिज्या है। उदाहरण में केंद्र (2,2) तथा त्रिज्या 3 है। तीन असमरेखीय बिंदु एक अद्वितीय वृत्त निर्धारित करते हैं।

Diameter endpoints $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$: $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

Find the circle whose diameter endpoints are (-1,2) and (5,2).

Solution: The centre is (2,2), the diameter is 6 and radius is 3. Equation: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

WATCH OUT: The distance between diameter endpoints is twice the radius.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Compare line distance with radius / रेखा और वृत्त की स्थिति

Let d be the perpendicular distance from the centre to a line. A secant has d < r, a tangent has d = r, and a line outside the circle has d > r. The perpendicular from the centre bisects a chord.

केंद्र से रेखा की लंबवत दूरी d को त्रिज्या r से तुलना करें। d < r पर छेदक, d = r पर स्पर्शरेखा और d > r पर रेखा बाहर है। उदाहरण में आधी जीवा √(25 - 9) = 4 है, इसलिए पूरी जीवा 8 है।

Chord length = $2\sqrt{(r^2 - d^2)}$, for $0 \le d \le r$.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Find the chord length cut from $x^2 + y^2 = 25$ by $y = 3$.

Solution: The line is 3 units from the centre and r = 5. Half-chord = √(25 - 9) = 4, so the chord length is 8.

WATCH OUT: Use perpendicular distance to the line, not a distance along an axis unless justified.

C4 / KEY CONCEPT

Tangents are perpendicular to radii / स्पर्शरेखा और अभिलंब

At a point P on the circle, the tangent is perpendicular to the radius CP. The point-form tangent is especially useful because it also handles vertical tangent lines. Before applying it, verify that the specified point lies on the circle.

स्पर्शबिंदु पर त्रिज्या स्पर्शरेखा के लंबवत होती है। उदाहरण में $x^2 + y^2 = 25$ पर (3,4) की स्पर्शरेखा $3x + 4y = 25$ है। अभिलंब केंद्र और स्पर्शबिंदु को जोड़ता है। सूत्र से पहले बिंदु का वृत्त पर होना जाँचें।

At (x_1,y_1) on $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$: $(x_1 - h)(x - h) + (y_1 - k)(y - k) = r^2$.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

Find the tangent to $x^2 + y^2 = 25$ at (3,4).

Solution: The tangent equation is $3x + 4y = 25$. The normal is the line through (0,0) and (3,4): $4x - 3y = 0$.

WATCH OUT: The tangent formula at a point assumes that point is on the circle.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Use the power of a point / बिंदु की घात

For a point P, power is $CP^2 - r^2$. It is positive outside, zero on, and negative inside the circle. From an external point, the square of the tangent length equals its power. A secant through the point gives the same product of directed intersection distances.

बिंदु की घात $CP^2 - r^2$ है। बाहर के बिंदु से स्पर्शरेखा की लंबाई का वर्ग यही घात होता है। उदाहरण में $13^2 - 5^2 = 144$ है, इसलिए लंबाई 12 है। अंदर के बिंदु से वास्तविक स्पर्शरेखा नहीं बनती।

Tangent length = $\sqrt{(CP^2 - r^2)}$, for $CP \geq r$.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Find the tangent length from (13,0) to $x^2 + y^2 = 25$.

Solution: CP = 13 and r = 5. The tangent length is $\sqrt{(169 - 25)} = 12$. There are two tangents because the point is outside.

WATCH OUT: An interior point has no real tangent to the circle.

C6 / KEY CONCEPT

Subtract circles to find equal power / मूलाक्ष और वृत्त-परिवार

If two circle equations are normalised with $x^2 + y^2$ coefficients equal to 1, subtracting them removes the quadratic terms. The resulting line is their radical axis, provided the centres differ. When the circles intersect, it is the line through their common chord.

सामान्यीकृत वृत्त समीकरण घटाने पर x^2 और y^2 हट जाते हैं। प्राप्त रेखा समान घात वाले बिंदुओं का बिंदुपथ है। उदाहरण में $6x - 18 = 0$ से मूलाक्ष $x = 3$ मिलता है। वृत्त कटें तो यही उभयनिष्ठ जीवा की रेखा है।

Radical axis: $S_1 - S_2 = 0$ for normalised circle equations.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Find the radical axis of $x^2 + y^2 = 25$ and $x^2 + y^2 - 6x = 7$.

Solution: Write $S_1 = x^2 + y^2 - 25$ and $S_2 = x^2 + y^2 - 6x - 7$. Subtraction gives $6x - 18 = 0$, hence $x = 3$.

WATCH OUT: The radical axis can exist even when the circles do not intersect.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C1

Find centre and radius of $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$ का केंद्र और त्रिज्या बताइए।

Q02 • C1

Convert $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ to centre-radius form.

$x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ को केंद्र-त्रिज्या रूप में लिखिए।

Q03 • C2

Find the circle with centre (1,-3) through (5,0).

केंद्र (1,-3) और वृत्त पर बिंदु (5,0) हो तो समीकरण निकालिए।

Q04 • C2

Find the circle with diameter endpoints (0,0),(6,8).

व्यास के सिरे (0,0) और (6,8) हों तो वृत्त का समीकरण निकालिए।

Q05 • C3

Classify $y = 6$ relative to $x^2 + y^2 = 36$.

$x^2 + y^2 = 36$ के सापेक्ष $y = 6$ की स्थिति बताइए।

Q06 • C3

Find the chord length cut by $x = 5$ from $x^2 + y^2 = 169$.

$x^2 + y^2 = 169$ से $x = 5$ द्वारा काटी गई जीवा की लंबाई निकालिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C4

Find the tangent to $x^2 + y^2 = 100$ at (6,8).

$x^2 + y^2 = 100$ पर (6,8) में स्पर्शरेखा निकालिए।

Q08 • C4

Find the normal to $x^2 + y^2 = 25$ at (4,3).

$x^2 + y^2 = 25$ पर (4,3) में अभिलंब निकालिए।

Q09 • C5

Find the tangent length from (10,0) to $x^2 + y^2 = 36$.

(10,0) से $x^2 + y^2 = 36$ की स्पर्शरेखा की लंबाई निकालिए।

Q10 • C5

Determine whether (2,3) is inside, on or outside $x^2 + y^2 = 16$.

(2,3), वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के अंदर, ऊपर या बाहर है?

Q11 • C6

Find the radical axis of $x^2 + y^2 - 4 = 0$ and $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$.

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ और $x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$ का मूलाक्ष निकालिए।

Q12 • C6

Find the common chord length for $x^2 + y^2 = 25$ and $x^2 + y^2 - 6x = 7$.

$x^2 + y^2 = 25$ और $x^2 + y^2 - 6x = 7$ की उभयनिष्ठ जीवा की लंबाई निकालिए।

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C1 • Recover the centre

Centre (-2,5); radius 7.

मानक रूप से केंद्र (-2,5) और त्रिज्या 7 है।

Q02 / C1 • Recover the centre

$(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$; centre (-4,3), radius 4.

पूर्ण वर्ग बनाने पर $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$ मिलता है। त्रिज्या 4 है।

Q03 / C2 • Build a circle from geometry

$r^2 = 4^2 + 3^2 = 25$; $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

केंद्र से दिए बिंदु की दूरी 5 है। समीकरण $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ है।

Q04 / C2 • Build a circle from geometry

Centre (3,4), radius 5: $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

व्यास का मध्यबिंदु (3,4) और आधी लंबाई 5 है। यही केंद्र और त्रिज्या हैं।

Q05 / C3 • Compare line distance with radius

Distance from centre equals radius 6, so the line is tangent at (0,6).

केंद्र से रेखा की दूरी और त्रिज्या दोनों 6 हैं। रेखा (0,6) पर स्पर्श करती है।

Q06 / C3 • Compare line distance with radius

$2\sqrt{(169 - 25)} = 24$.

आधी जीवा $\sqrt{(169 - 25)} = 12$ है। पूरी लंबाई 24 है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C4 • Tangents are perpendicular to radii

6x + 8y = 100, or 3x + 4y = 50.

बिंदु-रूप से 6x + 8y = 100 है। सरल रूप 3x + 4y = 50 है।

Q08 / C4 • Tangents are perpendicular to radii

It passes through the origin and (4,3): 3x - 4y = 0.

अभिलंब केंद्र और (4,3) को जोड़ता है। समीकरण 3x - 4y = 0 है।

Q09 / C5 • Use the power of a point

√(100 - 36) = 8.

स्पर्शरेखा की लंबाई √(100 - 36) = 8 है।

Q10 / C5 • Use the power of a point

Power = 4 + 9 - 16 = -3; the point is inside.

घात $2^2 + 3^2 - 16 = -3$ है। ऋणात्मक घात से बिंदु अंदर है।

Q11 / C6 • Subtract circles to find equal power

Subtract: 4x - 6 = 0, so x = 3/2.

समीकरण घटाने पर 4x - 6 = 0 है। मूलाक्ष x = 3/2 है।

Q12 / C6 • Subtract circles to find equal power

The radical axis is x = 3, giving y = ±4. Chord length = 8.

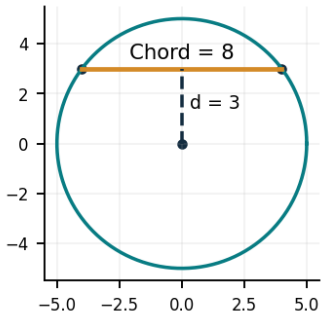
मूलाक्ष x = 3 को वृत्त में रखने पर y = ±4 है। दोनों बिंदुओं की दूरी 8 है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C3: a chord 3 units from the centre of a radius-5 circle has length 8.

Chord of contact

For $x^2 + y^2 = r^2$ and external point P(u,v), the line joining the two contact points is $ux + vy = r^2$. For P(13,0) and r = 5, this is x = 25/13.

Orthogonality and families

Circles with centre separation d intersect at right angles when $d^2 = r_1^2 + r_2^2$. The family $S_1 + \lambda S_2 = 0$ passes through their common points; $\lambda = -1$ can produce a line instead of a circle.

Challenge

Find horizontal tangents to $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$. The centre has y-coordinate -1 and radius 4, so the tangents are y = 3 and y = -5.

बाहरी बिंदु से बनी दोनों स्पर्शरेखाओं के स्पर्शबिंदुओं को जोड़ने वाली रेखा स्पर्शजीवा है। लंबवत काटने वाले वृत्तों में केंद्र-दूरी का वर्ग त्रिज्याओं के वर्गों का योग है। चुनौती में केंद्र की ऊँचाई -1 और त्रिज्या 4 से क्षैतिज स्पर्शरेखाएँ y = 3 और y = -5 मिलती हैं।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you decide whether a real tangent exists before using a tangent-length formula?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?