MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

01

Fundamentals of Mathematics I

गणित के मूल सिद्धांत I

Sets, inequalities and logarithms

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Describe sets and count overlapping groups.
- Solve inequalities without losing domain restrictions.
- Use exponential and logarithmic models.

Before you start: Arithmetic, factorisation and integer powers.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Start with the allowed values पहले परिभाषा-क्षेत्र जाँचें	Q05
C2 p. 2	Represent and combine sets समुच्चय और उनकी संक्रियाएँ	Q01, Q02, Q03
C3 p. 3	Count overlap once साझा सदस्यों की गणना	Q04
C4 p. 3	Use a sign chart चिह्न-सारणी से असमिका	Q06, Q07
C5 p. 4	Connect powers and logarithms घात और लघुगणक	Q08, Q10, Q12
C6 p. 4	Respect monotonicity बढ़ते और घटते फलन	Q09, Q11

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Start with the allowed values / पहले परिभाषा-क्षेत्र जाँचें

A domain is the collection of inputs for which an expression is defined. Check denominators, even roots and logarithms before manipulating an equation. An interval records a continuous set of real numbers: round brackets exclude endpoints; square brackets include them. Infinity is never an included endpoint.

> परिभाषा-क्षेत्र में केवल वे मान आते हैं जिन पर व्यंजक परिभाषित हो। हर शून्य नहीं हो सकता, वर्गमूल के अंदर का मान ऋणात्मक नहीं हो सकता और लघुगणक का तर्क धनात्मक होना चाहिए। उदाहरण में $x \geq -3$ है, लेकिन $x = 2$ हटाना होगा।

$1/f(x)$: $f(x) \neq 0$; $\sqrt{f(x)}$: $f(x) \geq 0$; $\log_a f(x)$: $f(x) > 0$.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

Find the domain of $\sqrt{(x + 3)}/(x - 2)$.

Solution: The root requires $x \geq -3$. The denominator excludes 2. The domain is $[-3, 2) \cup (2, \infty)$.

WATCH OUT: Cancelling a denominator does not restore an excluded input.

C2 / KEY CONCEPT

Represent and combine sets / समुच्चय और उनकी संक्रियाएँ

A set lists distinct elements or describes them through a rule. Union collects elements in either set, intersection keeps common elements, and $A \setminus B$ keeps elements of A outside B. Complements depend on an explicitly chosen universal set U. A subset can equal the original set; a proper subset cannot.

> समुच्चय में एक सदस्य को दो बार नहीं गिनते। संघ में दोनों समुच्चयों के सभी सदस्य और प्रतिच्छेद में साझा सदस्य आते हैं। पूरक हमेशा दिए गए सार्वत्रिक समुच्चय के सापेक्ष होता है। उदाहरण में साझा सदस्य 3 और 5 हैं।

$n(P(A)) = 2^n$ when $n(A) = n$; $A \setminus B = A \cap B^c$.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

Let $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,3,5\}$. Find $A \cap B$ and B^c.

Solution: The common elements are $\{3,5\}$. Removing B from U gives $B^c = \{1,4,6,7\}$.

WATCH OUT: Repeated entries do not increase the size of a set.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Count overlap once / साझा सदस्यों की गणना

Adding the sizes of two sets counts their intersection twice. Subtract that overlap once. For three sets, subtract all pairwise overlaps and then restore the triple overlap. A Venn diagram works best when the innermost region is filled first.

> दो समूहों की संख्याएँ जोड़ने पर साझा सदस्य दो बार गिने जाते हैं, इसलिए उन्हें एक बार घटाएँ। उदाहरण में कम-से-कम एक विषय पढ़ने वाले 25 + 23 - 14 = 34 हैं। कुल 42 में से शेष 8 कोई भी विषय नहीं पढ़ते।

n(A ∪ B) = n(A) + n(B) - n(A ∩ B).

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Of 42 learners, 25 study algebra, 23 study geometry and 14 study both. How many study neither?

Solution: At least one subject: 25 + 23 - 14 = 34. Neither: 42 - 34 = 8. Algebra only is 11 and geometry only is 9.

WATCH OUT: “Either” may mean inclusive or exclusive; read the wording.

C4 / KEY CONCEPT

Use a sign chart / चिह्न-सारणी से असमिका

Move all terms to one side and factor. Mark numerator zeros and denominator zeros on the number line. Test one point in each interval. Include numerator zeros for a non-strict inequality, but always exclude denominator zeros. An even-multiplicity factor does not change sign at its zero.

> शून्य बनाने वाले और हर को शून्य बनाने वाले मान संख्या-रेखा पर लिखें। हर अंतराल में चिह्न जाँचें। उदाहरण में -2 पर व्यंजक अपरिभाषित है, जबकि 4 पर शून्य है। इसलिए -2 को हटाएँ और ≥ होने से 4 को शामिल करें।

A product is positive when it has an even number of negative factors.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

Solve $(x - 4)/(x + 2) \geq 0$.

Solution: The critical values are -2 and 4. The signs on the three intervals are +, -, +. Include 4, exclude -2: $(-\infty, -2) \cup [4, \infty)$.

WATCH OUT: Do not multiply an inequality by an expression of unknown sign.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Connect powers and logarithms / घात और लघुगणक

A logarithm asks which exponent produces a positive number. A valid real base is positive and different from 1. Products inside a logarithm become sums, while quotients become differences. These rules apply only when the relevant arguments are positive.

लघुगणक उस घात को बताता है जिस पर आधार को उठाने से तर्क मिलता है। पहले तर्कों को धनात्मक रखें। उदाहरण में $x > 1$ जरूरी है। जोड़ को गुणन में बदलने पर $x^2 - 1 = 9$ मिलता है; इसलिए केवल $\sqrt{10}$ मान्य है।

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$; $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Solve $\log_3(x - 1) + \log_3(x + 1) = 2$.

Solution: The original domain is $x > 1$. Combining logs gives $x^2 - 1 = 9$, so $x = \pm\sqrt{10}$. Only $\sqrt{10}$ satisfies the domain.

WATCH OUT: $\log(M + N)$ is generally not $\log M + \log N$.

C6 / KEY CONCEPT

Respect monotonicity / बढ़ते और घटते फलन

Exponential and logarithmic functions with base greater than 1 increase. With base between 0 and 1, they decrease. Comparing outputs therefore preserves order in the first case and reverses it in the second. Solve the resulting algebraic inequality and intersect with the original domain.

आधार 1 से बड़ा हो तो लघुगणक बढ़ता है। आधार 0 और 1 के बीच हो तो वह घटता है और असमिका की दिशा बदलती है। उदाहरण में $x > 1$ तथा $x - 1 \leq 4$ दोनों चाहिए; उत्तर $1 < x \leq 5$ है।

$\log_a M = \ln M / \ln a$; for $0 < a < 1$, $\log_a M > \log_a N \Leftrightarrow M < N$.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Solve $\log_{1/2}(x - 1) \geq -2$.

Solution: Require $x > 1$. Since the base is below 1, $x - 1 \leq (1/2)^{-2} = 4$. Combining conditions gives $1 < x \leq 5$.

WATCH OUT: The argument must remain positive even after reversing the inequality.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C2

List $\{n^2 : n = 0,1,2,3,4\}$.

$\{n^2 : n = 0,1,2,3,4\}$ को सूची रूप में लिखिए।

Q02 • C2

How many subsets and proper subsets does a 5-element set have?

पाँच सदस्यों वाले समुच्चय के कुल उपसमुच्चय और उचित उपसमुच्चय कितने हैं?

Q03 • C2

$U = \{1,\ldots,9\}$, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{3,6,9\}$. Find $(A \cup B)^c$.

$U = \{1,\ldots,9\}$, $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{3,6,9\}$ के लिए $(A \cup B)^c$ ज्ञात कीजिए।

Q04 • C3

In a class of 50, 28 like chess, 26 like coding and 12 like both. Find the number liking neither.

50 विद्यार्थियों में 28 को शतरंज, 26 को कोडिंग और 12 को दोनों पसंद हैं। कितनों को इनमें से कोई पसंद नहीं है?

Q05 • C1

Find the domain of $\sqrt{(7 - x)}/(x + 1)$.

$\sqrt{(7 - x)}/(x + 1)$ का परिभाषा-क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

Q06 • C4

Solve $(x - 1)(x - 6) < 0$.

$(x - 1)(x - 6) < 0$ हल कीजिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C4

Solve $(x + 3)/(x - 2) \leq 0$.

$(x + 3)/(x - 2) \leq 0$ हल कीजिए।

Q08 • C5

Evaluate $\log_2 32 + \log_3(1/27)$.

$\log_2 32 + \log_3(1/27)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Q09 • C6

Solve 5^(2x - 1) = 125.

5^(2x - 1) = 125 में x ज्ञात कीजिए।

Q10 • C5

Solve $\log_2(x - 2) + \log_2(x + 2) = 5$.

$\log_2(x - 2) + \log_2(x + 2) = 5$ हल कीजिए।

Q11 • C6

Solve $\log_{1/3}(x + 2) < -1$.

$\log_{1/3}(x + 2) < -1$ हल कीजिए।

Q12 • C5

Solve $(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 = 0$.

$(\log_2 x)^2 - 5 \log_2 x + 6 = 0$ हल कीजिए।

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C2 • Represent and combine sets

{0,1,4,9,16}; square each permitted n.

हर दिए गए n का वर्ग लेने पर {0,1,4,9,16} मिलता है।

Q02 / C2 • Represent and combine sets

32 subsets; 31 proper subsets. Use 2^5, then remove the set itself.

कुल उपसमुच्चय $2^5 = 32$ हैं। स्वयं समुच्चय हटाने पर 31 उचित उपसमुच्चय हैं।

Q03 / C2 • Represent and combine sets

A ∪ B = {2,3,4,6,8,9}; complement = {1,5,7}.

संघ में {2,3,4,6,8,9} आते हैं। U में बचे सदस्य {1,5,7} हैं।

Q04 / C3 • Count overlap once

Union = 28 + 26 - 12 = 42; neither = 8.

कम-से-कम एक पसंद करने वाले 28 + 26 - 12 = 42 हैं। शेष 8 हैं।

Q05 / C1 • Start with the allowed values

$x \leq 7$ and $x \neq -1$, giving $(-\infty,-1) \cup (-1,7]$.

वर्गमूल के लिए $x \leq 7$ और हर के लिए $x \neq -1$ चाहिए। उत्तर $(-\infty,-1) \cup (-1,7]$ है।

Q06 / C4 • Use a sign chart

$1 < x < 6$; the factors have opposite signs between their roots.

दोनों गुणनखंडों के चिह्न 1 और 6 के बीच विपरीत हैं। उत्तर (1,6) है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C4 • Use a sign chart

[-3,2). Include the numerator zero; exclude the pole.

चिह्न-सारणी से उत्तर [-3,2) है। -3 शामिल और हर का शून्य 2 बाहर है।

Q08 / C5 • Connect powers and logarithms

5 + (-3) = 2.

पहला लघुगणक 5 और दूसरा -3 है। योग 2 है।

Q09 / C6 • Respect monotonicity

2x - 1 = 3, hence x = 2.

125 = 5^3 रखने पर 2x - 1 = 3, अतः x = 2 है।

Q10 / C5 • Connect powers and logarithms

x > 2; x^2 - 4 = 32 gives x = 6 after rejecting -6.

मूल शर्त x > 2 है। गुणन करने पर x^2 - 4 = 32 मिलता है। ±6 में केवल 6 स्वीकार्य है।

Q11 / C6 • Respect monotonicity

x + 2 > 3 because the base is below 1; x > 1.

आधार 1 से छोटा है, इसलिए दिशा बदलती है। x + 2 > 3 से x > 1 मिलता है।

Q12 / C5 • Connect powers and logarithms

Put t = $\log_2 x$. Then (t - 2)(t - 3) = 0, so x = 4 or 8.

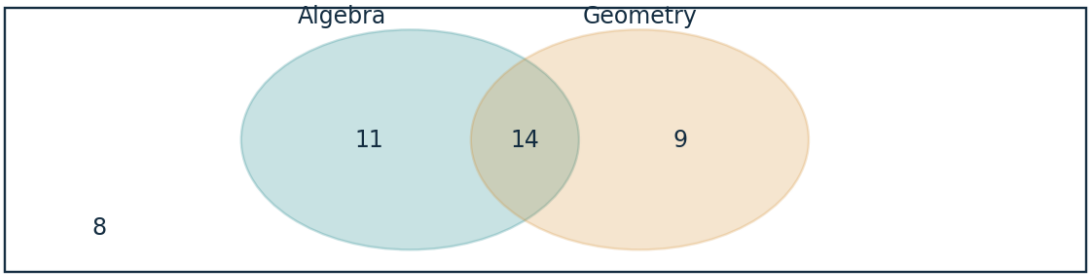
t = $\log_2 x$ रखने पर (t - 2)(t - 3) = 0 है। इसलिए x = 4 या 8 है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C3: 42 learners = 11 algebra only + 14 both + 9 geometry only + 8 neither.

Three-set counting

For three finite sets, use $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$. The pairwise counts include the triple intersection.

Variable bases

In $\log_x A$, also impose $x > 0$ and $x \neq 1$. If solving an inequality, split the base into $0 < x < 1$ and $x > 1$ before comparing arguments.

Challenge

Solve $\log_2(x - 1) \leq \log_2(7 - x)$. The domain is $1 < x < 7$. Increasing logs give $x - 1 \leq 7 - x$, so the answer is $(1,4]$.

तीन समुच्चयों में सभी जोड़ीदार प्रतिच्छेद घटाकर तिहरा प्रतिच्छेद वापस जोड़ें। चर आधार में $x > 0$ और $x \neq 1$ की शर्त भी चाहिए। चुनौती में दोनों तर्क धनात्मक रखने के बाद $x \leq 4$ मिलता है; अंतिम उत्तर $(1,4]$ है।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you explain why a denominator zero stays excluded even after factor cancellation?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?