MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

02

Fundamentals of Mathematics II

गणित के मूल सिद्धांत II

Modulus, radicals and graph transformations

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Interpret absolute value as distance.
- Solve piecewise and radical equations safely.
- Predict a graph before calculating points.

Before you start: Intervals, sign charts and equations.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	Distance before algebra निरपेक्ष मान अर्थात दूरी	Q01, Q02, Q03
C2 p. 2	Split at the turning points अंतराल बनाकर हल करें	Q04, Q06
C3 p. 3	Handle nested modulus नेस्टेड निरपेक्ष मान	Q05, Q11
C4 p. 3	Square only with a check वर्ग करने से पहले शर्त	Q07, Q08
C5 p. 4	Translate and scale graphs ग्राफ का स्थानांतरण	Q09, Q10
C6 p. 4	Reflect inputs or outputs इनपुट और आउटपुट का प्रतिबिंब	Q12

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

Distance before algebra / निरपेक्ष मान अर्थात दूरी

The absolute value |x - a| is the distance from x to a. A distance is nonnegative, so |f(x)| cannot equal a negative number. Equations involving a fixed distance usually give two positions; inequalities describe inside or outside an interval.

> |x - a| संख्या-रेखा पर x और a के बीच की दूरी है, इसलिए यह कभी ऋणात्मक नहीं होती। उदाहरण में |2x - 5| ≤ 7 को -7 ≤ 2x - 5 ≤ 7 लिखें। दोनों ओर समान क्रिया करने से -1 ≤ x ≤ 6 मिलता है।

|x - a| ≤ r ⇔ a - r ≤ x ≤ a + r, for r ≥ 0.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

Solve |2x - 5| ≤ 7.

Solution: Write -7 ≤ 2x - 5 ≤ 7. Add 5 and divide by 2: -1 ≤ x ≤ 6.

WATCH OUT: For |f| ≥ r, use an OR condition, not an AND condition.

C2 / KEY CONCEPT

Split at the turning points / अंतराल बनाकर हल करें

To remove modulus signs, first locate the zeros of their inner expressions. On each interval the signs are fixed. Replace |f| by f where f is nonnegative and by -f where f is negative, then retain only solutions belonging to that interval.

> हर निरपेक्ष मान के अंदर के व्यंजक को शून्य करके अंतराल बनाएँ। हर अंतराल में चिह्न निश्चित होता है। उदाहरण में मोड़ 1 और 5 हैं। बीच के अंतराल में दूरियों का योग 4 है; बाहर हल करने पर x = 0 और 6 मिलते हैं।

|u| = u if u ≥ 0; |u| = -u if u < 0.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

Solve |x - 1| + |x - 5| = 6.

Solution: For x ≤ 1, 6 - 2x = 6 gives x = 0. For 1 ≤ x ≤ 5, the sum is 4. For x ≥ 5, 2x - 6 = 6 gives x = 6.

WATCH OUT: An algebraic result must satisfy the interval used to obtain it.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Handle nested modulus / नेस्टेड निरपेक्ष मान

Work from the outermost distance condition inward. A substitution such as u = |x| reduces repeated absolute values, but u must be nonnegative. If an outer equation produces a negative candidate for u, reject it before returning to x.

> बाहरी निरपेक्ष मान से शुरुआत करें। ||x| - 4| = 3 में |x| - 4 का मान 3 या -3 होगा। इसलिए |x| = 7 या 1 और x के चार मान मिलते हैं। |x| के किसी ऋणात्मक मान को स्वीकार नहीं किया जा सकता।

||x| - a| = b ⇒ |x| = a + b or a - b, retaining nonnegative values.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

Solve ||x| - 4| = 3.

Solution: The inner value |x| is 7 or 1. Thus x = -7, -1, 1, 7. All four values satisfy the original equation.

WATCH OUT: The equation |x| = 0 gives one solution, not two distinct solutions.

C4 / KEY CONCEPT

Square only with a check / वर्ग करने से पहले शर्त

The principal square root is nonnegative. For √f(x) = g(x), require f(x) ≥ 0 and g(x) ≥ 0 before squaring. Squaring removes sign information; every candidate must be substituted into the original equation.

> मुख्य वर्गमूल हमेशा गैर-ऋणात्मक होता है। √(x + 6) = x में पहले x ≥ 0 लिखें। वर्ग करने पर 3 और -2 मिलते हैं, लेकिन -2 मूल समीकरण की शर्त नहीं मानता। इसलिए केवल x = 3 सही है।

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)^2$ and $g(x) \geq 0$.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

Solve √(x + 6) = x.

Solution: Require x ≥ 0. Squaring gives $x^2 - x - 6 = 0$, so x = 3 or -2. Only 3 remains, and √9 = 3.

WATCH OUT: $\sqrt{(x^2)}$ equals |x|, not always x.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Translate and scale graphs / ग्राफ का स्थानांतरण

For y = a f(b(x - h)) + k, the basic graph moves horizontally by h and vertically by k. Its vertical scale is |a| and horizontal scale is 1/|b|. Negative a reflects in the x-axis; negative b reflects horizontally relative to the shifted coordinate.

ग्राफ के अंदर x + 3 होने पर ग्राफ बाईं ओर 3 इकाई जाता है। बाहर 2 से गुणा करने पर ऊर्ध्वाधर खिंचाव और -4 से नीचे स्थानांतरण होता है। इसलिए 2|x + 3| - 4 का शीर्ष (-3,-4) है।

y = |x - h| + k has vertex (h,k) and range [k,∞).

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Describe y = 2|x + 3| - 4.

Solution: Start with y = |x|. Move left 3, stretch vertically by 2, then move down 4. The vertex is (-3,-4), and the zeros are -5 and -1.

WATCH OUT: A plus sign inside x + 3 moves the graph left.

C6 / KEY CONCEPT

Reflect inputs or outputs / इनपुट और आउटपुट का प्रतिबिंब

The graph y = |f(x)| reflects only portions below the x-axis upward. The graph y = f(|x|) keeps the right half and mirrors it into the left half. These are different operations. Domains of rational expressions and radicals still apply after transformations.

|f(x)| में x-अक्ष के नीचे का भाग ऊपर प्रतिबिंबित होता है। f(|x|) में दायाँ भाग बाईं ओर भी प्रतिबिंबित होता है। उदाहरण में x = -3 पर |x - 2| का मान 5 है, जबकि |x| - 2 का मान 1 है। दोनों ग्राफ अलग हैं।

|f(x)| changes output signs; f(|x|) changes the inputs.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Compare |x - 2| and |x| - 2 at x = -3.

Solution: The first value is |-5| = 5. The second is 3 - 2 = 1. Their vertices are (2,0) and (0,-2), respectively.

WATCH OUT: Do not move an absolute value sign through a sum.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C1

Solve $|x - 4| = 9$.

$|x - 4| = 9$ हल कीजिए।

Q02 • C1

Solve $|3x + 2| < 8$.

$|3x + 2| < 8$ हल कीजिए।

Q03 • C1

Solve $|x + 1| \geq 4$.

$|x + 1| \geq 4$ हल कीजिए।

Q04 • C2

Find all x satisfying $|x - 2| + |x - 7| = 5$.

$|x - 2| + |x - 7| = 5$ को संतुष्ट करने वाले सभी x ज्ञात कीजिए।

Q05 • C3

Solve $||x| - 5| = 2$.

$||x| - 5| = 2$ हल कीजिए।

Q06 • C2

Solve $|x - 1| = 2x + 1$.

$|x - 1| = 2x + 1$ हल कीजिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C4

Solve $\sqrt{(2x + 3)} = x$.

$\sqrt{(2x + 3)} = x$ हल कीजिए।

Q08 • C4

Find the domain of $\sqrt{(9 - x^2)}$.

$\sqrt{(9 - x^2)}$ का परिभाषा-क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

Q09 • C5

State vertex and range of $y = -|x - 2| + 6$.

$y = -|x - 2| + 6$ का शीर्ष और परास बताइए।

Q10 • C5

Find the zeros of $y = 3|x + 1| - 12$.

$y = 3|x + 1| - 12$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

Q11 • C3

Solve $|x^2 - 4| = 5$.

$|x^2 - 4| = 5$ हल कीजिए।

Q12 • C6

Solve $|x - 2| < |x + 4|$.

$|x - 2| < |x + 4|$ हल कीजिए।

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C1 • Distance before algebra

$x - 4 = \pm 9$, so $x = -5$ or 13.

$x - 4 = 9$ या -9 रखें। उत्तर 13 और -5 हैं।

Q02 / C1 • Distance before algebra

$-8 < 3x + 2 < 8$ gives $-10/3 < x < 2$.

$-8 < 3x + 2 < 8$ को हल करने पर $-10/3 < x < 2$ मिलता है।

Q03 / C1 • Distance before algebra

$x + 1 \geq 4$ or $x + 1 \leq -4$: $x \geq 3$ or $x \leq -5$.

$x + 1 \geq 4$ या $x + 1 \leq -4$ है। इसलिए $x \geq 3$ या $x \leq -5$ है।

Q04 / C2 • Split at the turning points

Every x in $[2,7]$; between the two endpoints the distances sum to 5.

2 से 7 के बीच दोनों दूरियों का योग हमेशा 5 है। उत्तर $[2,7]$ है।

Q05 / C3 • Handle nested modulus

$|x| = 7$ or 3, so $x = -7,-3,3,7$.

$|x| = 7$ या 3 है। चार मान $-7,-3,3,7$ हैं।

Q06 / C2 • Split at the turning points

The right side requires $x \geq -1/2$. On $x \geq 1$, the candidate -2 is invalid; on $x < 1$, $1 - x = 2x + 1$ gives $x = 0$.

पहले $2x + 1 \geq 0$ चाहिए। $x < 1$ वाले भाग में $1 - x = 2x + 1$ से $x = 0$ मिलता है। दूसरे भाग का मान अमान्य है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C4 • Square only with a check

$x \geq 0$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ gives candidates 3,-1. Only $x = 3$ works.

$x \geq 0$ चाहिए। वर्ग करने पर $(x - 3)(x + 1) = 0$ है। केवल $x = 3$ मूल समीकरण मानता है।

Q08 / C4 • Square only with a check

$9 - x^2 \geq 0$, so $-3 \leq x \leq 3$.

$9 - x^2 \geq 0$ से $-3 \leq x \leq 3$ मिलता है।

Q09 / C5 • Translate and scale graphs

Vertex (2,6); range $(-\infty,6]$.

ग्राफ नीचे खुलता है। शीर्ष (2,6) और परास $(-\infty,6]$ है।

Q10 / C5 • Translate and scale graphs

$|x + 1| = 4$ gives $x = -5$ or 3.

$|x + 1| = 4$ से $x + 1 = \pm 4$ है। उत्तर -5 और 3 हैं।

Q11 / C3 • Handle nested modulus

$x^2 - 4 = 5$ or -5. Real solutions come only from $x^2 = 9$: $x = \pm 3$.

$x^2 - 4 = 5$ से $x = \pm 3$ है। $x^2 - 4 = -5$ के वास्तविक हल नहीं हैं।

Q12 / C6 • Reflect inputs or outputs

Squaring the two nonnegative sides gives $x^2 - 4x + 4 < x^2 + 8x + 16$, so $x > -1$.

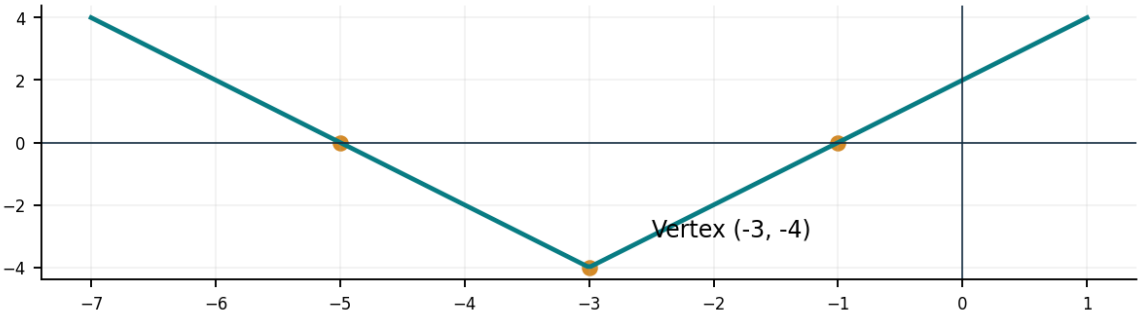
दोनों दूरियाँ गैर-ऋणात्मक हैं, इसलिए वर्ग कर सकते हैं। सरल करने पर $12x > -12$, अतः $x > -1$ है।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C5: y = 2|x + 3| - 4. The vertex and both zeros are marked.

A useful bound

For real a,b, $|a + b| \le |a| + |b|$ and $||a| - |b|| \le |a - b|$. Distance interpretations often avoid long casework.

Rational and radical inequalities

For $\sqrt{f(x)} \le g(x)$, require $g(x) \ge 0$ and $0 \le f(x) \le g(x)^2$. When a denominator is present, separate its sign cases before multiplying.

Challenge

Solve $|x - 2| + |x + 2| \le 8$. The sum is 4 on [-2,2], -2x to the left and 2x to the right. The combined answer is [-4,4].

त्रिभुज असमिका $|a + b| \le |a| + |b|$ अक्सर लंबे केस कम करती है। वर्गमूल की असमिका में दायाँ पक्ष भी गैर-ऋणात्मक होना चाहिए। चुनौती में बीच के अंतराल में योग 4 है और बाहर योग 2|x| है; उत्तर [-4,4] है।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you distinguish y = |f(x)| from y = f(|x|) without plotting many points?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?