MAAS / CLASS 11 / MATHEMATICS

03

Quadratic Equations

द्विघात समीकरण

Roots, graphs and parameter conditions

6 concepts
छह मुख्य अवधारणाएँ

6 worked examples
छह हल किए उदाहरण

12 practice questions
बारह अभ्यास प्रश्न

Learning targets / सीखने के लक्ष्य

- Choose a reliable method for finding roots.
- Use sums and products without solving explicitly.
- Read signs and extrema from a parabola.

Before you start: Factorisation, inequalities and square roots.

Concept map & question links / अवधारणा मानचित्र

Concept	Learn + explain / अवधारणा	Practice
C1 p. 2	See the parabola first पहले परवलय समझें	Q03, Q09
C2 p. 2	Solve by structure संरचना से मूल निकालें	Q01, Q02
C3 p. 3	Classify roots with the discriminant विविक्तकर से मूलों का प्रकार	Q04, Q05
C4 p. 3	Use roots without computing them मूल निकाले बिना गणना	Q06, Q07, Q10
C5 p. 4	Solve signs and intervals द्विघात व्यंजक का चिह्न	Q08
C6 p. 4	Translate conditions on roots मूलों पर लगी शर्तें	Q11, Q12

Read C1-C6 → attempt Q01-Q12 → check solutions → complete the extension.

पहले अवधारणा पढ़ें, फिर बिना हल देखे प्रश्न करें। गलती होने पर प्रश्न के C-कोड से संबंधित पाठ दोबारा पढ़ें।

Green panels: key formulas and conditions. Amber panels: common errors. Each lesson has an English explanation, a Hindi explanation and a worked example.

LEARN • समझें

Concepts 1 & 2

C1 / KEY CONCEPT

See the parabola first / पहले परवलय समझें

A quadratic $f(x) = ax^2 + bx + c$ has $a \neq 0$. Its graph opens upward for $a > 0$ and downward for $a < 0$. Completing the square reveals its turning point and makes the range visible before any roots are calculated.

पूर्ण वर्ग बनाने से परवलय का शीर्ष और न्यूनतम या अधिकतम मान स्पष्ट होता है। उदाहरण में $x^2 - 8x + 19 = (x - 4)^2 + 3$ है। वर्ग कम-से-कम शून्य होगा, इसलिए न्यूनतम मान 3 है और यह $x = 4$ पर मिलता है।

$f(x) = a(x + b/(2a))^2 - D/(4a)$, where $D = b^2 - 4ac$.

WORKED EXAMPLE 1 / हल किया उदाहरण

Find the minimum of $x^2 - 8x + 19$.

Solution: Write $(x - 4)^2 + 3$. The square is at least zero, so the minimum is 3 at $x = 4$. The range is $[3,\infty)$.

WATCH OUT: A minimum on a restricted interval may occur at an endpoint.

C2 / KEY CONCEPT

Solve by structure / संरचना से मूल निकालें

Factorisation is efficient when integer or rational factors are visible. Otherwise use the quadratic formula, obtained by completing the square. A quadratic has two complex roots counting multiplicity, although the real number system may contain none.

यदि गुणनखंड आसानी से बनें तो पहले वही तरीका अपनाएँ। अन्यथा द्विघात सूत्र प्रयोग करें। उदाहरण में $(2x - 1)(x - 3) = 0$ है, इसलिए मूल $1/2$ और 3 हैं। मूलों का योग और गुणनफल गुणांकों से मिलाकर जाँच सकते हैं।

$x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)})/(2a)$.

WORKED EXAMPLE 2 / हल किया उदाहरण

Solve $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Solution: Factor as $(2x - 1)(x - 3) = 0$. The roots are $1/2$ and 3. Their sum $7/2$ and product $3/2$ provide a quick check.

WATCH OUT: Divide the entire numerator by $2a$, not only the square-root term.

LEARN • समझें

Concepts 3 & 4

C3 / KEY CONCEPT

Classify roots with the discriminant / विविक्तकर से मूलों का प्रकार

For real coefficients, D > 0 gives two distinct real roots, D = 0 gives a repeated real root and D < 0 gives a non-real conjugate pair. Parameter questions often reduce to a discriminant inequality, but verify that the leading coefficient is not zero.

> विविक्तकर D धनात्मक हो तो दो भिन्न वास्तविक मूल, शून्य हो तो समान मूल और ऋणात्मक हो तो अवास्तविक सम्मिश्र मूल मिलते हैं। उदाहरण में D = 36 - 4k है। वास्तविक मूलों के लिए k ≤ 9 चाहिए।

$D = b^2 - 4ac$.

WORKED EXAMPLE 3 / हल किया उदाहरण

For which k does $x^2 - 6x + k = 0$ have real roots?

Solution: D = 36 - 4k. Requiring $D \geq 0$ gives $k \leq 9$. The roots are equal only when k = 9.

WATCH OUT: A nonnegative discriminant does not mean both roots are positive.

C4 / KEY CONCEPT

Use roots without computing them / मूल निकाले बिना गणना

If α and β are roots, their sum and product come directly from the coefficients. Rewrite symmetric expressions using these two quantities. To create an equation from new roots, compute the new sum and product and use a monic quadratic.

> मूलों का योग -b/a और गुणनफल c/a होता है। सममित व्यंजकों को इन्हीं से लिखना अक्सर आसान है। उदाहरण में योग 9 और गुणनफल 14 है, इसलिए वर्गों का योग $9^2 - 2 \times 14 = 53$ है।

$\alpha + \beta = -b/a$; $\alpha\beta = c/a$; $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$.

WORKED EXAMPLE 4 / हल किया उदाहरण

If α,β solve $x^2 - 9x + 14 = 0$, find $\alpha^2 + \beta^2$.

Solution: The sum is 9 and product is 14. Thus $\alpha^2 + \beta^2 = 9^2 - 2(14) = 53$. No separate roots were needed.

WATCH OUT: The product of reciprocal roots requires $\alpha\beta \neq 0$.

LEARN • समझें

Concepts 5 & 6

C5 / KEY CONCEPT

Solve signs and intervals / द्विघात व्यंजक का चिह्न

When a quadratic has real roots $r_1 < r_2$, its sign agrees with a outside the roots and is opposite to a between them. A repeated root touches the axis without changing sign. If $D < 0$, the sign agrees with a for every real x.

> ऊपर खुलने वाला परवलय अपने दो वास्तविक मूलों के बीच ऋणात्मक और बाहर धनात्मक होता है। उदाहरण में मूल -1/2 और 3 हैं। ≤ होने से दोनों सिरों को शामिल करके [-1/2,3] मिलता है।

For $a > 0$: $a(x - r_1)(x - r_2) \leq 0 \Leftrightarrow r_1 \leq x \leq r_2$.

WORKED EXAMPLE 5 / हल किया उदाहरण

Solve $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$.

Solution: Factor $(2x + 1)(x - 3)$. The roots are -1/2 and 3. The upward parabola is nonpositive between them, so x lies in [-1/2,3].

WATCH OUT: A strict inequality excludes the roots.

C6 / KEY CONCEPT

Translate conditions on roots / मूलों पर लगी शर्तें

Conditions such as both roots positive require several checks together. For real roots, a positive sum and positive product make both roots positive. Opposite signs require a negative product. For a restricted range of x, check the vertex and endpoints rather than only the discriminant.

> दोनों मूल धनात्मक होने के लिए केवल धनात्मक योग पर्याप्त नहीं है। मूल वास्तविक हों, योग धनात्मक हो और गुणनफल धनात्मक हो, तीनों शर्तें चाहिए। उदाहरण में $k > 0$ तथा $k \leq 25/4$ मिलकर अंतिम अंतराल देते हैं।

Both roots > 0 $\Leftrightarrow D \geq 0$, $-b/a > 0$ and $c/a > 0$.

WORKED EXAMPLE 6 / हल किया उदाहरण

Find k for which $x^2 - 5x + k = 0$ has two positive real roots, allowing equality between roots.

Solution: The sum is 5. The product requires $k > 0$. Reality requires $25 - 4k \geq 0$. Therefore $0 < k \leq 25/4$.

WATCH OUT: “Distinct positive roots” changes $D \geq 0$ to $D > 0$.

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice A

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q01 • C2

Solve $x^2 - 11x + 24 = 0$.

$x^2 - 11x + 24 = 0$ हल कीजिए।

Q02 • C2

Solve $3x^2 + x - 2 = 0$.

$3x^2 + x - 2 = 0$ हल कीजिए।

Q03 • C1

Find the minimum of $2x^2 - 12x + 23$.

$2x^2 - 12x + 23$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

Q04 • C3

Find k for a repeated root in $x^2 + 8x + k = 0$.

$x^2 + 8x + k = 0$ के समान मूलों के लिए k ज्ञात कीजिए।

Q05 • C3

Classify the roots of $4x^2 - 4x + 5 = 0$.

$4x^2 - 4x + 5 = 0$ के मूलों का प्रकार बताइए।

Q06 • C4

If roots of $x^2 - 7x + 10 = 0$ are α,β, find $1/\alpha + 1/\beta$.

$x^2 - 7x + 10 = 0$ के मूल α,β हैं। $1/\alpha + 1/\beta$ ज्ञात कीजिए।

PRACTISE • अभ्यास करें

Practice B

Show your method. Concept codes point to the relevant lesson. Solutions begin on page 7.

केवल उत्तर नहीं, विधि भी लिखें। आवश्यकता हो तो संबंधित C-कोड वाला पाठ देखें।

Q07 • C4

Form the monic quadratic with roots -3 and 6.

-3 और 6 मूलों वाला द्विघात समीकरण लिखिए, जिसमें x^2 का गुणांक 1 हो।

Q08 • C5

Solve $x^2 - 2x - 15 > 0$.

$x^2 - 2x - 15 > 0$ हल कीजिए।

Q09 • C1

Find the range of $x^2 - 4x + 7$ on $0 \le x \le 5$.

$0 \le x \le 5$ पर $x^2 - 4x + 7$ का परास ज्ञात कीजिए।

Q10 • C4

If α, β solve $x^2 - 4x + 1 = 0$, form an equation with roots $\alpha + 2$, $\beta + 2$.

α, β समीकरण $x^2 - 4x + 1 = 0$ के मूल हैं। $\alpha + 2$ और $\beta + 2$ मूलों वाला समीकरण बनाइए।

Q11 • C6

Find all k for which $x^2 + kx - 8 = 0$ has opposite-sign real roots.

$x^2 + kx - 8 = 0$ के वास्तविक मूलों के चिह्न विपरीत होने के लिए k के सभी मान बताइए।

Q12 • C6

For which k is $x^2 - 4x + k$ strictly positive for every real x?

$x^2 - 4x + k$ हर वास्तविक x के लिए सख्ती से धनात्मक कब होगा?

CHECK • हल जाँचें

Solutions A

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q01 / C2 • Solve by structure

(x - 3)(x - 8) = 0; roots 3,8.

(x - 3)(x - 8) = 0 से मूल 3 और 8 हैं।

Q02 / C2 • Solve by structure

(3x - 2)(x + 1) = 0; roots 2/3,-1.

(3x - 2)(x + 1) = 0 से मूल 2/3 और -1 हैं।

Q03 / C1 • See the parabola first

$2(x - 3)^2 + 5$ has minimum 5 at x = 3.

व्यंजक $2(x - 3)^2 + 5$ है। न्यूनतम मान 5, x = 3 पर मिलता है।

Q04 / C3 • Classify roots with the discriminant

64 - 4k = 0 gives k = 16; the repeated root is -4.

समान मूल के लिए D = 64 - 4k = 0, अतः k = 16 है।

Q05 / C3 • Classify roots with the discriminant

D = 16 - 80 = -64 < 0; two non-real conjugate roots.

D = 16 - 80 = -64 है। इसलिए दोनों मूल अवास्तविक सम्मिश्र संयुग्मी हैं।

Q06 / C4 • Use roots without computing them

$(\alpha + \beta)/(\alpha\beta) = 7/10$.

व्युत्क्रमों का योग मूलों के योग को गुणनफल से भाग देने पर मिलता है: 7/10।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CHECK • हल जाँचें

Solutions B

Compare the method as well as the final answer. For Hindi concept explanations, use the C-code.

उत्तर के साथ तरीका भी मिलाएँ। हिंदी में तर्क समझने के लिए संबंधित अवधारणा पढ़ें।

Q07 / C4 • Use roots without computing them

Sum 3, product -18: $x^2 - 3x - 18 = 0$.

मूलों का योग 3 और गुणनफल -18 है। समीकरण $x^2 - 3x - 18 = 0$ है।

Q08 / C5 • Solve signs and intervals

$(x - 5)(x + 3) > 0$, so $x < -3$ or $x > 5$.

मूल -3 और 5 हैं। ऊपर खुलने वाला परवलय बाहर धनात्मक है: $x < -3$ या $x > 5$।

Q09 / C1 • See the parabola first

$(x - 2)^2 + 3$ has minimum 3. Endpoint values are 7 and 12; range [3,12].

शीर्ष पर न्यूनतम 3 है। सिरों पर मान 7 और 12 हैं, इसलिए परास [3,12] है।

Q10 / C4 • Use roots without computing them

New sum 8; product $1 + 2(4) + 4 = 13$. Equation $x^2 - 8x + 13 = 0$.

नया योग 8 और नया गुणनफल 13 है। समीकरण $x^2 - 8x + 13 = 0$ है।

Q11 / C6 • Translate conditions on roots

Every real k. Product -8 is negative and $D = k^2 + 32 > 0$.

गुणनफल -8 सदैव ऋणात्मक और $D = k^2 + 32$ सदैव धनात्मक है। हर वास्तविक k मान्य है।

Q12 / C6 • Translate conditions on roots

Minimum $k - 4$ must exceed 0, so $k > 4$.

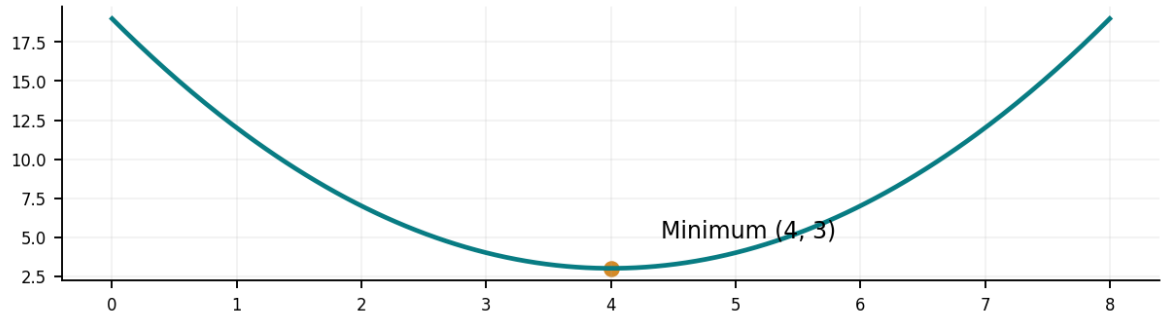
पूर्ण वर्ग रूप $(x - 2)^2 + k - 4$ है। न्यूनतम धनात्मक होने के लिए $k > 4$ चाहिए।

Correct? Explain why the method works. Incorrect? Mark the first step that changed the answer.

सही होने पर कारण समझाएँ। गलत होने पर पहली गलत क्रिया पहचानें और दोबारा हल करें।

CONNECT • संबंध समझें

Visual review & extension



C1: $x^2 - 8x + 19 = (x - 4)^2 + 3$; the graph never meets the x-axis.

Common roots

Subtract suitable multiples of two quadratic equations to eliminate x^2. Any resulting candidate must satisfy both originals. If elimination produces an identity, the quadratics may be proportional.

A higher-degree connection

For a polynomial $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, the sum of all complex roots counting multiplicity is $-a_{n-1}/a_n$ and their product is $(-1)^n a_0/a_n$.

Challenge

If α,β are roots of $x^2 - 6x + 4 = 0$, find $\alpha^3 + \beta^3$. Use $(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 216 - 72 = 144$.

उभयनिष्ठ मूल खोजते समय x^2 को हटाकर मिले मान को दोनों समीकरणों में जाँचें। उच्च घात वाले बहुपदों में भी मूलों के योग और गुणनफल के संबंध होते हैं। चुनौती में घनों का योग $6^3 - 3 \times 4 \times 6 = 144$ है।

SELF-CHECK / स्वयं जाँचें

Can you separate “real roots”, “positive roots” and “positive for every real x”?

क्या आप मुख्य सूत्र की शर्त और एक सामान्य गलती अपने शब्दों में समझा सकते हैं?